解答例

STEP I 2012、第 1 問

純粋数学 • 微積分による最適化

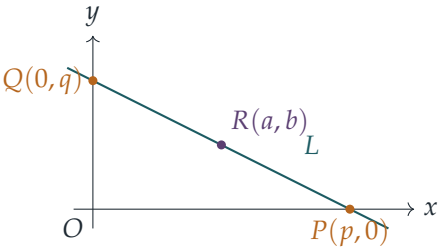
> **STEP I 2012、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q1

鍵となる考え方

すべてはただ一つの数、傾き（gradient）によって決まる。L が R を通るように固定されると、切片（intercept）p と q は m の簡単な関数となり、最小化すべき二つの距離はどちらも m だけの関数になる。和 $p+q$ は定数と $am+b/m$ の形の項とに分かれ、これは相加相乗平均の不等式（AM–GM）（あるいは一回の微分）の典型的な出番である。長さ PQ については、$q=mp$ に気づいておくと得をする。これにより、微分する前に PQ^2 がきれいに因数分解できるからである。

解答

p と q を求める



$R(a,b)$ は $y=c-mx$ 上にあるので $b=c-ma$、すなわち $c=b+ma$ である。直線は $x=0$ のところで y 軸と交わるので $q=c$ であり、$y=0$ のところで x 軸と交わるので $p=c/m$ である（$m>0$ なので、この割り算は許される）。したがって

$$p=a+\frac{b}{m}, \qquad q=b+ma.$$

任意の $m > 0$ に対して、要求どおりどちらも正である。また、次のことにも注意しよう。

$$q = b + ma = m\left(a + \frac{b}{m}\right) = mp,$$

これは L の傾きが $-q/p$ であることを言い換えたにすぎない。この事実は後で用いる。

$OP + OQ$ の最小化

$p, q > 0$ なので、O から P、Q までの距離はそれぞれ p、q そのものである。よって、R を固定したまま m を $m > 0$ の範囲で動かすとき、次の量を最小化しなければならない。

$$S(m) = p + q = a + b + \left(am + \frac{b}{m}\right).$$

括弧の中は二つの正の数の和であり、その積 ab は m によらない。相加相乗平均の不等式より

$$am + \frac{b}{m} \geq 2\sqrt{am \cdot \frac{b}{m}} = 2\sqrt{ab},$$

であり、等号が成り立つのは $am = b/m$、すなわち $m = \sqrt{b/a}$ のときであり、かつそのときに限る（これは正なので、この直線は許される）。したがって

$$S(m) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2,$$

であり、この下界は実際に達成される。よって、距離の和の最小値は要求どおり $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2$ である。

（微分法を使いたければ：$S'(m) = a - b/m^2$ は $m = \sqrt{b/a}$ でのみ値が 0 となり、代入すると同じ値が得られる。）

PQ の最小化

三平方の定理（Pythagoras' theorem）と $q = mp$ を用いると

$$PQ^2 = p^2 + q^2 = p^2(1 + m^2) = \left(a + \frac{b}{m}\right)^2 (1 + m^2).$$

$PQ > 0$ なので、PQ を最小化することは $f(m) = PQ^2$ を最小化することと同じである。積の微分法と合成関数の微分法（chain rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(-\frac{b}{m^2}\right)(1 + m^2) + 2m\left(a + \frac{b}{m}\right)^2 \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left[-\frac{b}{m^2} - b + am + b\right] \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(am - \frac{b}{m^2}\right). \end{aligned}$$

考えてみよう $-b$ はどこで打ち消し合うのか？

角括弧の中では $-\frac{b}{m^2}(1+m^2) = -\frac{b}{m^2} - b$ であり、一方 $m(a+\frac{b}{m}) = am+b$ であるから、二つの b が打ち消し合う。p^2+q^2 を直接展開せずに PQ^2 を $p^2(1+m^2)$ と書いたのは、この打ち消し合いのためである。

最初の因数は正なので、$f'(m)=0$ となるのは $am = b/m^2$、すなわち $m^3 = b/a$ のときであり、かつそのときに限る。よって停留点（stationary point）はただ一つで、

$$m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

である。（これが最小であると仮定してよいと問題文にあるが、実際、これより小さい m では $f'<0$、大きい m では $f'>0$ となるので、これは $m>0$ 全体での最小値を与える。）

では代入しよう。この m に対して

$$a+\frac{b}{m} = a+b\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}), \qquad 1+m^2 = 1+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

したがって

$$PQ^2 = a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3,$$

となり、P と Q の距離の最小値は

$$PQ_{\min} = (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

である。これが問題で求められている「同様の形」である。最初の答えは内側の指数が $\frac{1}{2}$、外側が 2 であり、今回の答えは内側が $\frac{2}{3}$、外側が $\frac{3}{2}$ である。

検算

- 対称性：a と b を入れ替える（$y=x$ に関して折り返す）と、二つの最小値はどちらも変わらないはずであり、実際そうなっている。
- 数値例：$a=1$、$b=8$ とする。第二の結果からは $m=2$ と予測され、このとき $p=5$、$q=10$、$PQ=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11.180$ となり、確かに $(1+4)^{3/2}=5\sqrt{5}$ である。和については、$m=\sqrt{8}$ のとき $p+q=9+4\sqrt{2}\approx 14.657=(1+2\sqrt{2})^2$ となる。
- 2000 組のランダムな (a,b) について、二つの最小値を m に関する総当たり探索の結果と照合したところ、約 10^{-8} の精度で一致した。

よくある間違い

- p^2+q^2 を完全に展開してから微分すること。正しくはあるが煩雑で、因数 $am-b/m^2$ を見落としやすい。先に $q=mp$ に気づけば、大幅に手間が省ける。
- PQ の最小化と PQ^2 の最小化が同値なのは $PQ>0$ だからこそであることを忘れること。また、$a+b/m$ を簡単にする際に分数べきの扱いを見失うこと。

STEP のその先へ

第二の結果は、古典的な「角を曲がるはしご」の問題が姿を変えたものである。$(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ は、幅 a と b の廊下が交わる角を、水平に保ったまま運んで曲がることのできる最も長いはしごの長さである。一定の長さをもつ線分 PQ の族の包絡線（envelope）はアステロイド（astroid）$x^{2/3}+y^{2/3}=\ell^{2/3}$ であり、R が包絡線上にあるのは ℓ がちょうどこの最小値に等しいときである。包絡線や制約付き最適化（constrained optimisation、のちにはラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法）は大学 1 年次の微積分の講義に登場する。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。