解答例

# STEP III 2011、第 9 問

力学 ・ 円柱面上の運動

**STEP III 2011、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

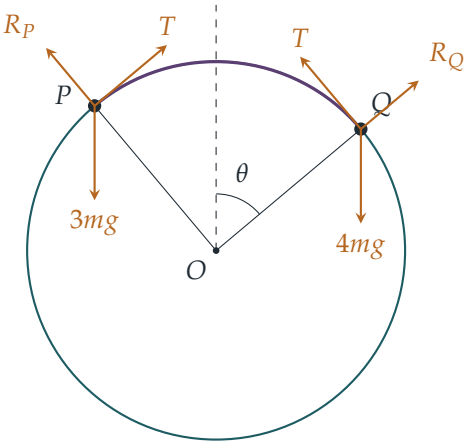
step.maths.org/questions/11-s3-q9

## 鍵となる考え方

円柱面上にある長さ $\frac{1}{2}\pi a$ の糸は $O$ において直角をはさむので、$OP$ と $OQ$ は常に垂直であり、系全体はただ一つの座標 $\theta$ で記述できる。すると、エネルギー保存則（conservation of energy）から $\dot{\theta}^2$ が直接得られ、中心方向のニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）から、各垂直抗力（normal reaction）が $\dot{\theta}^2$ を用いて表される。面から離れるとは、垂直抗力がゼロになることである。張力（tension）については接線方向（tangential）の運動方程式を用いる。2 式を加えると $T$ が消去されて $\ddot{\theta}$ が得られ、あとはどちらか一方の式から $T$ が求まる。

## 解答

**モデル化**。$P$ と $Q$ は質点、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）とし、円柱はなめらか（smooth）とする。なめらかな面にかかる軽い糸の張力は、どこでも同じ値 $T$ である。2 つの質点の間の弧の長さは $\frac{1}{2}\pi a$ なので、$\angle POQ = \frac{1}{2}\pi$ である。$\theta$ を、$OQ$ が鉛直上向きとなす角とし、$Q$ は頂点の一方の側にあるとする。すると $OP$ は、頂点の反対側で鉛直上向きと角 $\frac{1}{2}\pi - \theta$ をなす。質点が面上にある間は、どちらも半径 $a$ の円周上を角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ で動くので、それぞれの速さは $a\dot{\theta}$ である。




**つり合い（equilibrium）**。各質点で面に沿った方向に力を分解する（垂直抗力は接線方向の成分をもたず、糸は接線方向に頂点へ向かって引く）。$Q$ については $T = 4mg\sin\theta$、$P$ については $T = 3mg\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = 3mg\cos\theta$ を得る。したがって初めの状態では $\tan\theta = \frac{3}{4}$、すなわち $\sin\theta = \frac{3}{5}$、$\cos\theta = \frac{4}{5}$ である。

**エネルギー**。$O$ の高さを位置エネルギー（potential energy）の基準とする。$Q$ の高さは $a\cos\theta$、$P$ の高さは $a\cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = a\sin\theta$ である。垂直抗力は運動の方向に垂直なので仕事をせず、張力は糸が伸び縮みしないので系全体に対して正味の仕事をしない。よってエネルギーは保存される。わずかに乱しただけなので系は静止状態から動き出し、

$$\tfrac{1}{2}(3m + 4m)a^2\dot{\theta}^2 + 4mga\cos\theta + 3mga\sin\theta = 4mga\cdot\tfrac{4}{5} + 3mga\cdot\tfrac{3}{5} = 5mga.$$

両辺に $2/(ma)$ を掛けると

$$7a\dot{\theta}^2 + 8g\cos\theta + 6g\sin\theta = 10g,$$

となり、示すべき式が得られた。$Q$ が下に動くにつれて、$\theta$ は $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ から増加する。

### 小問 (i)

$Q$ は半径 $a$ の円周上を速さ $a\dot{\theta}$ で動くので、$O$ に向かう加速度 $a\dot{\theta}^2$ をもつ。重力の $O$ 向きの成分は $4mg\cos\theta$ であり、$R_Q$ は外向きにはたらく。糸は接線方向なので、半径方向には寄与しない。よって

$$4mg\cos\theta - R_Q = 4ma\dot{\theta}^2, \qquad \text{よって} \qquad R_Q = 4mg\cos\theta - 4ma\dot{\theta}^2.$$

$Q$ が面から離れるのは $R_Q$ がゼロになるとき、すなわち $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$ のときである。これを $\theta = \beta$ におけるエネルギーの式に代入すると

$$7g\cos\beta + 8g\cos\beta + 6g\sin\beta = 10g \quad\Longrightarrow\quad 15\cos\beta + 6\sin\beta = 10,$$

となり、示すべき式が得られた。

> **考えてみよう** なぜエネルギーの式は $\theta = \beta$ に至るまでずっと成り立つのだろうか。

この式は 2 つの質点がともに円柱上にある限り成り立ち、問題文から先に離れるのは $Q$ であることがわかっている。このことは確かめることもできる。$P$ について同じ議論をすると $R_P = 3mg\sin\theta - 3ma\dot{\theta}^2$ となり、これは $13\sin\theta + 8\cos\theta = 10$ のときにゼロになる。$\beta \approx 73.6^\circ$ では左辺はおよそ 14.7 なので、$R_P$ はまだ正である。

### 小問 (ii)

今度は運動の向きを正として接線方向に分解する。$Q$ は接線方向の加速度 $a\ddot{\theta}$ で頂点から遠ざかり、$P$ は同じ接線方向の加速度 $a\ddot{\theta}$ で頂点に近づく（糸によって両者の速さは等しく保たれる）。$Q$ については、重力の成分 $4mg\sin\theta$ が前向きにはたらき、張力が後ろ向きに引く：

$$4ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - T. \tag{1}$$

$P$ については、張力が前向きに引き、重力の成分 $3mg\cos\theta$ が後ろ向きにはたらく：

$$3ma\ddot{\theta} = T - 3mg\cos\theta. \tag{2}$$

(1) と (2) を加えると $T$ が消去されて

$$7ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - 3mg\cos\theta.$$

（これは、エネルギーの式を時間で微分して $2\dot{\theta}$ で割ったものと一致する。）これを (1) に代入すると

$$\begin{aligned} T &= 4mg\sin\theta - 4ma\ddot{\theta} \\ &= 4mg\sin\theta - \tfrac{4}{7}m(4g\sin\theta - 3g\cos\theta) \\ &= \tfrac{12}{7}mg\sin\theta + \tfrac{12}{7}mg\cos\theta = \tfrac{12}{7}mg(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。これは $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ で正なので、糸は運動の間ずっと張ったままである。

## 検算

- つり合いの位置では $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ なので $T = \frac{12}{5}mg$ である。これは $4mg \cdot \frac{3}{5}$ および $3mg \cdot \frac{4}{5}$ と一致する。
- $\tan\alpha = \frac{2}{5}$ として $15\cos\beta + 6\sin\beta = \sqrt{261}\cos(\beta - \alpha)$ と書くと、$\beta \approx 1.2839$ rad $\approx 73.56^\circ$ を得る。つり合いの位置をわずかに過ぎたところから運動を数値的に追跡

したところ、$R_Q$ はまさにこの角度で初めてゼロになり、その間 $R_P$ は正のままであった。エネルギーの関係式と張力の式は、経路全体にわたって丸め誤差の範囲で成り立っていた。

## よくある間違い

- $P$ の高さを $a\sin\theta$ ではなく $a\cos\theta$ としてしまう。糸の長さの意味はまさに直角 $\angle POQ$ にある。
- 質点ごとに異なる張力を与えたり、半径方向の式に $T$ を入れたりする。糸は質点に接線方向に接しているので、$T$ は接線方向の式にしか現れない。

## STEP のその先へ

ただ一つの座標 $\theta$ ですべてが記述されるので、これは 1 自由度（one degree of freedom）の系である。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いると、拘束力（forces of constraint）をまったく考えずに、運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギーから直接運動方程式が得られる。そのうえで、垂直抗力や張力は拘束条件に対する「ラグランジュ乗数（Lagrange multipliers）」として現れる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ラグランジュ（Lagrange）の方法に出会う前に、拘束された運動やエネルギーを用いた方法の感覚を深めるのに適した本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。