解答例

STEP III 2011、第 8 問

純粋数学 • 複素平面上の軌跡

> **STEP III 2011、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q8

鍵となる考え方

分母の共役（conjugate）を分子と分母に掛けて u と v を求める。その後は、各小問とも与えられた直線を代入し、見慣れた曲線を見抜けばよい。半角の置換（half-angle substitution）によって $\frac{2x}{1+x^2}$ と $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ は正弦と余弦に変わる。問題文がこの置換を勧めているのはまさにそのためである。全体を通して、曲線上のどの点が実際に取られるのかに注意を払うこと。端点や除外される点こそが答えの半分なのである。

解答

$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。すると $1 + \mathrm{i}z = (1-y) + \mathrm{i}x$、$\mathrm{i} + z = x + \mathrm{i}(1+y)$ であるから、分子と分母に $x - \mathrm{i}(1+y)$ を掛けて

$$\begin{aligned} w &= \frac{((1-y)+\mathrm{i}x)(x-\mathrm{i}(1+y))}{x^2+(1+y)^2} \\ &= \frac{(1-y)x + x(1+y) + \mathrm{i}(x^2-(1-y)(1+y))}{x^2+(1+y)^2}. \end{aligned}$$

よって

$$u = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}, \qquad v = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(1+y)^2},$$

である。これは $z \neq -\mathrm{i}$ のとき成り立つ（そこでは w は定義されない）。

逆写像（inverse map）も求めておくと役に立つ。$w(\mathrm{i}+z) = 1 + \mathrm{i}z$ より $z(w-\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}w$ となるから

$$z = \frac{1-\mathrm{i}w}{w-\mathrm{i}}, \qquad w \neq \mathrm{i}.$$

したがって、$w \neq \mathrm{i}$ であるすべての w はちょうど一つの z から得られ、$w = \mathrm{i}$ は決して取られない。これが、以下で何度も出会う除外点である。

小問 (i)

$y = 0$ のとき

$$u = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad v = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$x = \tan(\theta/2)$ とおく。x がすべての実数を動くとき、θ は $-\pi < \theta < \pi$ を動き、各 x に対してそのような θ がちょうど一つ対応する。半角の公式より

$$u = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \sin\theta, \qquad v = -\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = -\cos\theta.$$

よって $u^2+v^2 = 1$ である。さらに、$-\pi < \theta < \pi$ における $(\sin\theta, -\cos\theta)$ は、$\theta = \pm\pi$ に対応する点、すなわち $(u,v) = (0,1)$ を除いて単位円全体を描く。したがって w の軌跡（locus）は、ただ一点 $w = \mathrm{i}$ を除いた円 $u^2+v^2 = 1$ であり、これが示すべきことであった。（除外点は $x \to \pm\infty$ のときの w の極限である。）

小問 (ii)

今度は $-1 < x < 1$ であり、これは $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対応する。この範囲では $v = -\cos\theta < 0$ であり、$u = \sin\theta$ は -1 から 1 まで（両端を含まずに）増加する。よって w の軌跡は

$$u^2+v^2 = 1, \quad v < 0,$$

すなわち単位円の下半分であり、端点 $w = \pm 1$（これらは $x = \pm 1$ から得られる）は含まない。

小問 (iii)

$x = 0$ のとき $u = 0$ であり、

$$v = \frac{y^2-1}{(1+y)^2} = \frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)^2} = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1},$$

となる。ここで $y > -1$ であるから $y+1$ で約分してよい。

考えてみよう 負の v の値はすべて取られるのか、それとも一部だけなのか？

y が -1 から 1 まで増加するとき、$y+1$ は $(0,2)$ を増加し、したがって $\frac{2}{y+1}$ は $(1,\infty)$ を減少し、v は $(-\infty, 0)$ を連続かつ狭義に増加する。$y \to -1^+$ のとき $v \to -\infty$、$y \to 1^-$ のとき $v \to 0^-$ である。よって負の v はすべてちょうど一回ずつ取られる。w の軌跡

は虚軸の負の部分

$$u = 0, \quad v < 0,$$

であり、原点（これは $y = 1$ から得られる）は除かれる。

小問 (iv)

$y = 1$ のとき

$$u = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad v = \frac{x^2}{x^2+4}.$$

すると

$$u^2 + v^2 = \frac{4x^2 + x^4}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+4} = v,$$

であるから、w は $u^2 + v^2 = v$ 上、すなわち

$$u^2 + (v - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4},$$

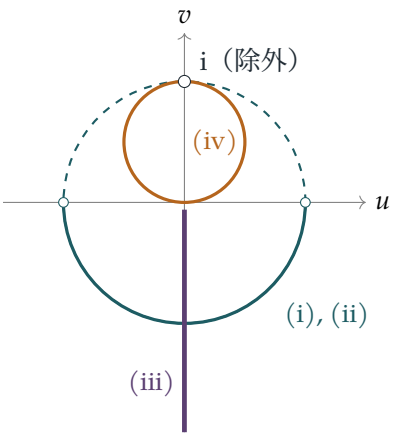
上にある。これは中心 $\frac{1}{2}\mathrm{i}$、半径 $\frac{1}{2}$ の円である。

考えてみよう この円のどの点が実際に取られるのか？

$v = 1 - \frac{4}{x^2+4}$ であるから $0 \le v < 1$ となり、最上点 $w = \mathrm{i}$ は決して取られない。それ以外の点はすべて取られる。実際、$-\pi < \phi < \pi$ として $x = 2\tan(\phi/2)$ とおくと

$$u = \frac{\tan(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}\sin\phi, \qquad v = \frac{\tan^2(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\phi),$$

となり、これは $\phi = \pm\pi$ に対応する点 $(0,1)$ を除いて円全体を一周する。（あるいは、逆写像から各 $w \neq \mathrm{i}$ がちょうど一つの z から得られることがわかる。）よって軌跡は、点 $w = \mathrm{i}$ を除いた円 $u^2 + v^2 = v$ である。この円は $w = 0$ で実軸に接し、この点は $z = \mathrm{i}$ の像である。



破線と実線からなるティール色の円は実軸の像であり、小問 (i) にあたる。実線の下半分が小問 (ii) である。プラム色の半直線が小問 (iii)、アンバー色の円が小問 (iv) である。

検算

- $z = 0$ gives $w = 1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$ となる。これは下半円 (ii) 上にも半直線 (iii) 上にもあり、実際 $z = 0$ は両方の線分上にある。
- $z = 1 + \mathrm{i}$ のとき $w = \frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$ であり、$0.4^2 + 0.2^2 = 0.2 = v$ であるから、(iv) の円上にある。
- 大きな実数 z：$w(10^8) \approx 2 \times 10^{-8} + \mathrm{i}$ であり、除外点 i に近づく。
- さらに、数千個の無作為な点について、u, v の公式と、主張した各軌跡上のすべての点が正しい直線または線分上に原像をもつことを数値的に確かめた。

よくある間違い

- 円や半円を答えるだけで、どの点が除外されるか、あるいは含まれないかを述べないこと。ここでは (i) と (iv) の $w = \mathrm{i}$、(ii) の端点 ± 1 がそれにあたる。
- (iii) の軌跡を虚軸全体だと主張すること。$v = \frac{y-1}{y+1}$ はすべての $-1 < y < 1$ に対して負である。

STEP のその先へ

この写像はメビウス変換（Möbius transformation）である。実際 $w = \mathrm{i}\,\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$ であるから $|w| = |z - \mathrm{i}|/|z + \mathrm{i}|$ となり、これが 1 に等しいのは z が $\pm\mathrm{i}$ から等距離にあるとき、すなわち実数のときに限る。メビウス変換は直線と円を直線と円に移し（直線は「∞ を通る円」とみなす）、除外点 i は ∞ の像である。この写像（ケーリー変換（Cayley transform））は上半平面（upper half-plane）を単位円板（unit disc）の上に移し、複素解析（complex analysis）や双曲幾何（hyperbolic geometry）における重要な道具である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、図を中心にしたメビウス変換の美しい解説を含んでいる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。