解答例

STEP III 2011、第 7 問

純粋数学 • 数学的帰納法

> **STEP III 2011、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q7

鍵となる考え方

$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ を 2 乗すると個々の平方根が消え、$p+q\sqrt{a(a+1)}$ の形の数が残る。したがって n が偶数のときは、T_2 を掛けることで T_n から T_{n+2} へ進むことができる。さらに量 $A^2-a(a+1)B^2$ はこの掛け算で変わらないことがわかり、これがまさに数学的帰納法（induction）に必要なことである。もう 1 つ因数 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$ を掛ければ奇数の n も扱え、(i) と (ii) の恒等式は、2 つの項が連続する整数の平方根であることを示している。

解答

以下を通じて $N=a(a+1)$ とおく。すると $\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}=\sqrt{N}$ である。

小問 (i)

基底段階（*base case*）、$n=2$。展開すると

$$T_2=(a+1)+2\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}+a=(2a+1)+2\sqrt{N},$$

となるので、$A_2=2a+1$ と $B_2=2$ は整数であり、

$$A_2^2-NB_2^2=4a^2+4a+1-4a(a+1)=1.$$

帰納段階（*inductive step*）。ある偶数 $n\geq 2$ について、$T_n=A_n+B_n\sqrt{N}$ であり、整数 A_n, B_n が $A_n^2-NB_n^2=1$ を満たすと仮定する。簡単のため $p=2a+1$ と書き、

$p^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 4N + 1$ に注意する。$T_{n+2} = T_n T_2$ であるから、

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= (A_n + B_n\sqrt{N})(p + 2\sqrt{N}) \\ &= (pA_n + 2NB_n) + (2A_n + pB_n)\sqrt{N}. \end{aligned}$$

よって

$$A_{n+2} = pA_n + 2NB_n, \qquad B_{n+2} = 2A_n + pB_n,$$

ととればよく、p、N、A_n、B_n が整数であるからこれらも整数である。恒等式については、交差項 $\pm 4pNA_nB_n$ が打ち消し合う：

$$\begin{aligned} A_{n+2}^2 - NB_{n+2}^2 &= (p^2A_n^2 + 4pNA_nB_n + 4N^2B_n^2) - N(4A_n^2 + 4pA_nB_n + p^2B_n^2) \\ &= (p^2 - 4N)A_n^2 - N(p^2 - 4N)B_n^2 \\ &= A_n^2 - NB_n^2 = 1, \end{aligned}$$

ここで $p^2 - 4N = 1$ を使い、続いて帰納法の仮定（inductive hypothesis）を用いた。したがって主張は $n+2$ についても成り立ち、数学的帰納法により、すべての正の偶数 n について成り立つ。

また、$A_2, B_2 > 0$ であり漸化式（recurrence）の係数はすべて正であるから、すべての偶数 n について $A_n > 0$ かつ $B_n > 0$ である。これは小問 (iii) で必要になる。

考えてみよう なぜ $A^2 - NB^2$ は T_2 を掛けても変わらないのか？

$A^2 - NB^2 = (A + B\sqrt{N})(A - B\sqrt{N})$ であり、同じ計算により「共役」（conjugate）$A - B\sqrt{N}$ には各段階で $p - 2\sqrt{N}$ が掛かることがわかるからである。したがって積には $(p + 2\sqrt{N})(p - 2\sqrt{N}) = p^2 - 4N = 1$ が掛かる。上の計算は、この事実を書き下したものにすぎない。

小問 (ii)

$n = 1$ の場合。 $T_1 = 1 \cdot \sqrt{a+1} + 1 \cdot \sqrt{a}$ であるから $C_1 = D_1 = 1$ であり、$(a+1)C_1^2 = a + 1 = aD_1^2 + 1$ である。

$n \geq 3$ が奇数の場合。 このとき $m = n - 1$ は正の偶数であるから、小問 (i) より $T_m = A_m + B_m\sqrt{N}$ かつ $A_m^2 - NB_m^2 = 1$ である。$\sqrt{N}\sqrt{a+1} = (a+1)\sqrt{a}$ と $\sqrt{N}\sqrt{a} = a\sqrt{a+1}$ を用いると、

$$\begin{aligned} T_n = (\sqrt{a+1} + \sqrt{a})(A_m + B_m\sqrt{N}) &= A_m\sqrt{a+1} + A_m\sqrt{a} + (a+1)B_m\sqrt{a} + aB_m\sqrt{a+1} \\ &= (A_m + aB_m)\sqrt{a+1} + (A_m + (a+1)B_m)\sqrt{a}. \end{aligned}$$

よって $C_n = A_m + aB_m$ と $D_n = A_m + (a+1)B_m$ は整数である（しかも正である）。さ

て、

$$\begin{aligned}(a+1)C_n^2 - aD_n^2 &= (a+1)(A_m^2 + 2aA_mB_m + a^2B_m^2) \\ &\quad - a(A_m^2 + 2(a+1)A_mB_m + (a+1)^2B_m^2) \\ &= A_m^2 + a(a+1)[a-(a+1)]B_m^2 \\ &= A_m^2 - NB_m^2 = 1,\end{aligned}$$

となる。A_mB_m の項が打ち消し合うからである。したがって、求める通り $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$ である。($n=1$ の場合も、実は $T_0 = 1$、すなわち $A_0 = 1$、$B_0 = 0$ とした同じ計算である。)

小問 (iii)

n が偶数の場合。$A_n > 0$ かつ $B_n > 0$ であるから、

$$T_n = A_n + B_n\sqrt{N} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{NB_n^2},$$

であり、小問 (i) より整数 NB_n^2 と $A_n^2 = NB_n^2 + 1$ は連続している。

考えてみよう なぜ A_n と B_n の符号が必要なのか？

$\sqrt{A^2} = |A|$ であり、A ではないからである。$A_n = \sqrt{A_n^2}$ と書けるのは $A_n \geq 0$ がわかっている場合に限られる。小問 (i) で正であることを記録しておいたのはこのためである。

n が奇数の場合。$C_n, D_n > 0$ であるから、

$$T_n = C_n\sqrt{a+1} + D_n\sqrt{a} = \sqrt{(a+1)C_n^2} + \sqrt{aD_n^2},$$

であり、小問 (ii) より整数 aD_n^2 と $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$ は連続している。

以上より、すべての正の整数 n について、ある正の整数 k を用いて $T_n = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$ と書ける。具体的には、n が偶数のとき $k = a(a+1)B_n^2$、n が奇数のとき $k = aD_n^2$ である。

検算

$a = 3$ とすると $T_n = (2+\sqrt{3})^n$ である。このとき $T_2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{12} = \sqrt{49} + \sqrt{48}$ であり、$49 = 12 \cdot 4 + 1$ である。次に、$A_2 = 7$、$B_2 = 2$ から $C_3 = 13$、$D_3 = 15$ が得られ、$T_3 = 26 + 15\sqrt{3} = \sqrt{676} + \sqrt{675} \approx 51.9808$ となる。これは $(2+\sqrt{3})^3$ を直接計算した値と一致する。コンピュータで $1 \leq a \leq 39$、$n \leq 23$ の範囲について漸化式を計算し、両方の恒等式が整数演算で厳密に成り立つこと、および T_n の展開が数値的に正しいことを確認した。

よくある間違い

- 基底段階を忘れる、あるいは小問 (i) が偶数の n のみを扱っているのに $n = 1$ から帰納法を始めてしまう。
- 小問 (iii) で、A_n（および B_n、C_n、D_n）が正であることに触れずに $A_n = \sqrt{A_n^2}$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

方程式 $x^2 - Ny^2 = 1$ はペル方程式（Pell's equation）であり、小問 (i) は $(2a+1) + 2\sqrt{a(a+1)}$ の累乗が $N = a(a+1)$ に対する無限個の解を生み出すことを示している。鍵となる事実は、$x + y\sqrt{N}$ の「ノルム」（norm）$x^2 - Ny^2$ が乗法的（multiplicative）であることであり、これが二次体（quadratic number fields）とその単数（units）の理論の出発点となる。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）には、ペル方程式と連分数（continued fractions）についての非常に読みやすい解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。