解答例

STEP III 2011、第 6 問

純粋数学 ・ 積分の置換

> **STEP III 2011、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q6

鍵となる考え方

どの積分も値を求めてはならないので、使える道具はある積分を別の積分に書き換えるもの、すなわち置換積分（substitution）と部分積分（integration by parts）だけである。手がかりは積分区間にある。$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ と $\ln 2, \ln 3$ は $v = e^{-u}$ で結びつき、$\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\ln 3$ は $t = e^{-2x}$ によって $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ と結びつく。積分 T と V は積分区間が同じであり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2}$ であることから、両者の間に部分積分を用いればよいと見当がつく。この三つのつながりがあれば、四つの積分がすべて等しいことを示すのに十分である。



解答

全体を通して次を用いる。

$$\operatorname{artanh} t = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad (|t|<1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2},$$

特に $\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3$、$\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 2$ である。被積関数（integrand）はいずれもそれぞれの（有界な閉）区間で連続（continuous）であるから、どの積分も存在し、以下の式変形は正当である。

$T = V$：部分積分

T において $\frac{1}{t}$ を積分し $\operatorname{artanh} t$ を微分する。すなわち $u = \operatorname{artanh} t$、$\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ とおくと $w = \ln t$ である（積分区間で $t > 0$ なので問題ない）。

$$\begin{aligned} T &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} + V, \end{aligned}$$

残った積分はちょうど V だからである（積分変数（dummy variable）の名前は関係ない）。

考えてみよう 境界項があると等式が崩れてしまうのではないか？

境界項（boundary term）は消える。ここがこの問題の巧妙なところである。上端では $\ln\frac{1}{2} \cdot \operatorname{artanh}\frac{1}{2} = (-\ln 2)(\frac{1}{2}\ln 3)$、下端では $\ln\frac{1}{3} \cdot \operatorname{artanh}\frac{1}{3} = (-\ln 3)(\frac{1}{2}\ln 2)$ となる。どちらも $-\frac{1}{2}\ln 2 \ln 3$ であるから

$$\Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2 \ln 3 + \tfrac{1}{2}\ln 2 \ln 3 = 0,$$

したがって $T = V$ である。

$V = U$：置換 $v = e^{-u}$

$v = e^{-u}$ とおくと、$\ln v = -u$、$\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$ である。$v = \frac{1}{3}$ のとき $u = \ln 3$、$v = \frac{1}{2}$ のとき $u = \ln 2$ である。よって

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{-u}{1-e^{-2u}}\left(-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（上端と下端を入れ替えた）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{e^{u}-e^{-u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{（分母と分子に } e^{u} \text{ を掛けた）} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{2\sinh u}\,\mathrm{d}u = U. \end{aligned}$$

$X = T$：置換 $t = e^{-2x}$

まず X の被積関数を書き換える。$x > 0$ のとき

$$\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}, \qquad \text{よって} \qquad \ln(\coth x) = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\operatorname{artanh}\left(e^{-2x}\right),$$

これは $0 < e^{-2x} < 1$ であるから成り立つ。ここで $t = e^{-2x}$ とおくと $\mathrm{d}t = -2t\,\mathrm{d}x$、すなわち $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$ である。$x = \frac{1}{2}\ln 2$ のとき $t = \frac{1}{2}$、$x = \frac{1}{2}\ln 3$ のとき $t = \frac{1}{3}$ である。ゆ

えに

$$X = \int_{1/2}^{1/3} 2\operatorname{artanh} t \left(-\frac{1}{2t}\right) \mathrm{d}t = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\operatorname{artanh} t}{t}\, \mathrm{d}t = T.$$

結論

三つのつながりを合わせると $X = T = V = U$ となり、四つの積分はすべて等しい。これが示すべきことであった。どの積分についても、値を求める必要は一度もなかった。

検算

それぞれの積分に個別にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $T \approx U \approx V \approx X \approx 0.177704$ となり、小数点以下およそ 12 桁まで一致する。境界項が消えることを電卓で手早く確かめておくのも安心材料になる。$\ln\frac{1}{2} \cdot \operatorname{artanh}\frac{1}{2}$ と $\ln\frac{1}{3} \cdot \operatorname{artanh}\frac{1}{3}$ はどちらも $-0.3807\ldots$ となる。

よくある間違い

- $V = U$ で負号を落とす。負号は三つあり（V の前のもの、$\ln v = -u$ のもの、$\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$ のもの）、上端と下端の入れ替えで四つ目が加わる。
- 境界項が 0 でないように見えるからといって、両端で値を計算しないまま部分積分をあきらめてしまう。
- $\ln\coth x = \operatorname{artanh}(e^{-2x})$ と書いて係数 2 を落とす。この 2 は後で $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$ の $\frac{1}{2}$ と打ち消し合う。

STEP のその先へ

$\operatorname{artanh} t/t$ をべき級数（power series）に展開すると、共通の値は $\chi_2(\frac{1}{2}) - \chi_2(\frac{1}{3})$ であることがわかる。ここで $\chi_2(z) = \sum_{k\geq 0} z^{2k+1}/(2k+1)^2$ はルジャンドル（Legendre）のカイ関数（chi function）であり、二重対数関数（dilogarithm）$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ の近い親類である。これらの関数に関する多くの恒等式は、まさにこの種の変数変換から得られる。どちらの値も計算せずに二つの積分が等しいことを示すのは解析学（analysis）の標準的な手法であり、置換積分や部分積分を正当化する定理（連続性、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus））は、大学で最初に学ぶ解析学の講義で厳密に扱われる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、それらが丁寧に証明されるのを見るのに適した本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。