解答例

STEP III 2011、第 5 問

純粋数学 • 積分による面積

> **STEP III 2011、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q5

この問題は、*Beyond STEP* の第 4.9 節「**ホールディッチの定理**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch04/holditch.html

鍵となる考え方

直交座標による公式 $(*)$ が役に立つのは、それが**双線形**（bilinear）だからである。A が P を t のみに依存するベクトルだけずらした点であれば、OA が掃く面積は、OP が掃く面積、ずれだけから生じる面積、そして交差項（cross term）に分かれる。棒はまさにそのようなずれ、すなわち単位ベクトル（unit vector）$(\cos t, \sin t)$ の $\mp$ 倍を与える。交差項 f は計算できそうにないが、実は計算する必要はない。A と B はどちらも同じ曲線 $\mathcal{C}$ を一周するので $[A] = [B]$ であり、この等式から f が決まるのである。

解答

面積の公式

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおく。ここで r と θ は t の関数である。積の微分法則（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta},$$

となる。ここでドットは $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を表す。よって

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\dot{\theta} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

である。$r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$ の項が打ち消し合うからである。積分変数を θ から t に変換すると

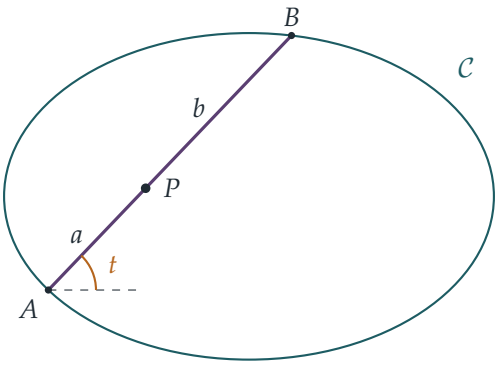
$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\int r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

となり、これが $(*)$ である。

A と B の座標

棒は A から B へ向かって単位ベクトル $\mathbf{u} = (\cos t, \sin t)$ の方向を向いており、P はその間にあって $AP = a$、$PB = b$ である。よって A は $P - a\mathbf{u}$、B は $P + b\mathbf{u}$ であり、

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$



OA が掃く面積

再びドットで $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を表す。A については

$$x_A = x - a\cos t, \quad \dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t, \qquad y_A = y - a\sin t, \quad \dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t.$$

である。展開すると

$$x_A\dot{y}_A = x\dot{y} - a\cos t\,(x + \dot{y}) + a^2\cos^2 t,$$
$$y_A\dot{x}_A = y\dot{x} + a\sin t\,(y - \dot{x}) - a^2\sin^2 t,$$

となるので

$$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A = (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2 - a\Big[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t\Big].$$

である。ここで t を 0 から 2π まで動かして $(*)$ を適用する。最初の括弧からは $[P]$ が、定数 a^2 からは $\frac{1}{2}\cdot 2\pi a^2 = \pi a^2$ が得られ、最後の項は f の定義により $-af$ となる。したがって

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af,$$

であり、これが示すべきことであった。

B については、変わるのは全体を通して $-a$ が $+b$ になる点だけである（上の計算で a を $-b$ に置き換えればよい）。よって

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の面積

考えてみよう $[A]$、$[B]$、$[P]$ は実際には何に等しいか？

t が 0 から 2π まで動くと、棒はちょうど一回転する。両端はどちらも $\mathcal{C}$ を反時計回りに一周して出発点に戻る。半回転した時点で A と B は入れ替わり、一回転すると元の位置に戻るのである。原点は $\mathcal{D}$ の内部にあり、したがって $\mathcal{C}$ の内部にもある。よって OA と OB はそれぞれ $\mathcal{C}$ で囲まれた領域をちょうど一度掃き、OP は $\mathcal{D}$ で囲まれた領域を一度掃く。これらの面積を $|\mathcal{C}|$、$|\mathcal{D}|$ と書くと

$$[A] = [B] = |\mathcal{C}|, \qquad [P] = |\mathcal{D}|.$$

$[A] = [B]$ とおくと $[P]$ が消去される：

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad (a+b)f = \pi(a^2 - b^2) = \pi(a-b)(a+b).$$

$a + b > 0$（棒の長さである）なので、両辺を割って $f = \pi(a-b)$ を得る。したがって

$$|\mathcal{C}| - |\mathcal{D}| = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab.$$

よって曲線の間の面積は πab である。代わりに $[B]$ を使っても $\pi b^2 + b\pi(a-b) = \pi ab$ となり、整合性が確かめられて安心できる。

検算

- **円の場合。** $\mathcal{C}$ が半径 R の円であれば、長さ $a+b$ の弦は中心から常に距離 $d = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2}$ にある。三平方の定理（Pythagoras' theorem）により、P は中心から距離 $\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$ にあるので、$\mathcal{D}$ は半径の 2 乗が $R^2 - ab$ である同心円である。両者の間の面積は $\pi R^2 - \pi(R^2 - ab) = \pi ab$ である。
- **対称性。** 答えは a と b について対称であり、そうでなければならない。棒の向きを逆にすると両者の役割が入れ替わるからである。
- **数値的な確認。** $a = 1$、$b = 1.5$ の棒を楕円 $x^2/16 + y^2/9 = 1$ に沿って動かし、描かれた曲線の面積を靴ひも公式（shoelace formula）で計算した。曲線の間の面積

は 4.712390 となり、$\pi ab = 1.5\pi \approx 4.712389$ と一致した。また、ランダムに選んだ曲線 $P(t)$ について、$[A]$ と $[B]$ の恒等式を数値積分（quadrature）で確かめた。

よくある間違い

- $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$ の符号を間違える。$-a\cos t$ を微分すると $+a\sin t$ になる。
- f を直接計算しようとする。f は $\mathcal{D}$ の形に依存し、それ以上の情報がなければ計算できない。肝心なのは、$[A] = [B]$ によって f が決まるという点である。

STEP のその先へ

これは Holditch の定理（Holditch's theorem、1858 年）である。$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間の面積は a と b のみに依存し、$\mathcal{C}$ の形にはよらない。公式 $(*)$ はグリーンの定理（Green's theorem）の特別な場合である。グリーンの定理は、領域上の面積分をその境界に沿った線積分（line integral）に変換するものである。これはまた、境界をなぞることで面積を測る機械的な装置であるプラニメーター（planimeter、面積計）の原理でもある。グリーンの定理は大学 1 年次のベクトル解析（vector calculus）の中心的な話題であり、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、こうした境界積分について見事に幾何学的な見方を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。