解答例

STEP III 2011、第 4 問

純粋数学 ・ ヤングの不等式

> **STEP III 2011、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.4 節「**不等式を証明する面積**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/areas-inequalities.html

鍵となる考え方

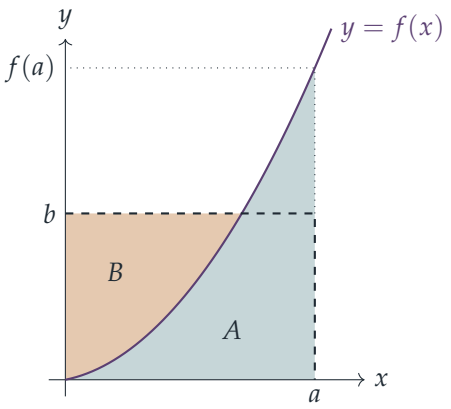
$(*)$ の 2 つの積分は、どちらも同じ図の上の面積である。$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ は曲線と x 軸の間の面積であり、$\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ は曲線と y 軸の間の面積である。この 2 つを合わせると、頂点 $(0,0)$ と (a,b) をもつ長方形を必ず覆い、頂点 (a,b) が曲線上にない限り、はみ出す部分が生じる。小問 (ii) と (iii) は、あとは f を選んで 2 つの積分を計算するだけである。

解答

小問 (i)

f は連続（continuous）で傾き（gradient）が正であるから、狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって逆関数（inverse function）f^{-1} が存在し、これも増加関数である。また $f(0)=0$ より、曲線 $y=f(x)$ は原点から始まる。

$0 \le x \le a$ の範囲で曲線と x 軸に挟まれた領域を A とする。その面積は $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ である。$0 \le y \le b$ の範囲で曲線と y 軸に挟まれた領域を B とする。y について積分すれば、その面積は $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ である。2 つの領域は曲線に関して反対側にあるので、重なり合わない。



まず、図のように $b \le f(a)$ の場合を考える。長方形 $0 \le x \le a, 0 \le y \le b$ のすべての点は、曲線上またはその下側（したがって A に属する）か、曲線上またはその左側（したがって B に属する）のいずれかにある。よって A と B を合わせると面積 ab の長方形を覆い、$(*)$ が成り立つ。はみ出す部分は A のうち直線 $y = b$ より上の部分、すなわち $f^{-1}(b) \le x \le a$ における直線と曲線の間の細い領域である。

逆に $b \ge f(a)$ の場合は、役割を入れ替えれば同じ議論が通用する。長方形は覆われ、今度ははみ出す部分は B のうち直線 $x = a$ より右の部分である。

したがって $(*)$ はどの場合にも成り立ち、等号が成り立つにははみ出す部分の面積が 0 でなければならない。$a, b > 0$ かつ $b \ne f(a)$ のとき、はみ出す部分は一方の端でしか交わらない曲線と直線で囲まれるので、その面積は正である。ゆえに $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき、

$$\text{等号成立の必要十分条件は} b = f(a),$$

すなわち長方形の頂点 (a, b) が曲線上にあることである。

小問 (ii)

$p > 1$ のとき、$f(x) = x^{p-1}$ は $x \ge 0$ で連続であり、$f(0) = 0$ を満たし、そこで狭義単調増加であるから、$(*)$ が適用できる。（傾き $(p-1)x^{p-2}$ は $x > 0$ で正である。$p < 2$ のときは 0 で発散するが、面積による議論には影響しない。）その逆関数は $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ である。

条件 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ から $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ が得られるので、

$$q = \frac{p}{p-1}, \qquad \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

よって $f^{-1}(y) = y^{q-1}$ であり、2 つの積分は

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y = \frac{b^q}{q}.$$

これを $(*)$ に代入すると

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

となり、示すべき不等式が得られる。

考えてみよう ここで等号成立条件 $b = f(a)$ は何を意味するか。また b^q はどう簡単にできるか。

条件は $b = a^{p-1}$ である。このとき $(p-1)q = p$ であるから $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$ となる。よって

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p = a \cdot a^{p-1} = ab,$$

となり、確かに等号が成り立つ。

小問 (iii)

$0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$ において $f(x) = \sin x$ とする。これは連続で $f(0) = 0$ を満たし、傾き $\cos x$ は $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ で正であるから、狭義単調増加である（傾きが 0 になるのは端点のみであり、議論には影響しない）。この関数は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ を $[0,1]$ の上へ写し、逆関数は arcsin である。これらはちょうど a と b に許された範囲である。

1 つ目の積分は

$$\int_0^a \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos a.$$

2 つ目については、$u = \arcsin y$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y$ として部分積分（integration by parts）を行う：

$$\begin{aligned}\int_0^b \arcsin y \,\mathrm{d}y &= \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= b \arcsin b + \Big[\sqrt{1-y^2}\Big]_0^b \\ &= b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.\end{aligned}$$

これらを足すと 1 どうしが打ち消し合い、$(*)$ は

$$ab \le b \arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a,$$

となる。これが示すべき不等式であり、等号は $b = \sin a$ のときに成り立つ。

考えてみよう a は自由に選べる。どれを選べば目的の不等式が得られるか。

$t \ge 1$ に対して $b = t^{-1}$ とおくと、これは必要どおり $(0,1]$ に属する。不等式の両辺に $t > 0$ を掛け、$t\sqrt{1-t^{-2}} = \sqrt{t^2-1}$（$t > 0$ より成り立つ）を用いると

$$a \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t\cos a \quad \text{任意の} a \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

目標の不等式には a が含まれず、右辺に t がある。これは $a = 0$ のときの $t\cos a$ にほかならない。$a = 0$ とすると

$$0 \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t, \qquad \text{すなわち} \qquad \arcsin(t^{-1}) \ge t - \sqrt{t^2-1} \quad (t \ge 1).$$

検算

- $t = 1$ のとき最終的な不等式は $\frac{1}{2}\pi \ge 1$ となり、$t = 2$ のときは $\frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 \ge 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$ となる。
- $t \to \infty$ のとき、両辺はともに $\frac{1}{t}$ の程度である。実際 $\arcsin(t^{-1}) \approx t^{-1} + \frac{1}{6}t^{-3}$ である一方、$t - \sqrt{t^2-1} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$ である。したがって、この評価は真の値のおよそ半分である。
- 小問 (iii) の不等式を 2×10^5 個の無作為な点 (a, b) で検証したところ、一度も破れず、差が 0 に近づくのは曲線 $b = \sin a$ の近くだけであった。また、無作為な p, a, b についてヤングの不等式（Young's inequality）を確かめ、2 つの積分をシンプソンの公式（Simpson's rule）で確かめた。

よくある間違い

- 小問 (i) で $b \le f(a)$ の場合しか図示しないこと。$b \ge f(a)$ の場合は対称であるが、そのことは明記すべきである。
- $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ と書いたのに $1/(p-1) = q - 1$ に気づかず、積分 b^q/q が現れないこと。
- 最後の段階で、評価を最適化する a を探そうとすること。その a は $\arcsin(t^{-1})$ であり、自明な恒等式しか与えない。うまくいくのは最も単純な選択 $a = 0$ である。

STEP のその先へ

小問 (ii) はヤングの不等式であり、ヘルダー（Hölder）の不等式 $\sum |x_i y_i| \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}$ を導く標準的な道筋である。そしてヘルダーの不等式は、解析学における L^p 空間の土台となっている。$\int f$ と $\int f^{-1}$ を組にする考え方は、ルジャンドル変換（Legendre transform）と凸双対性（convex duality）の萌芽であり、これらは力学（ラグランジアンからハミルトニアンへの移行）や最適化に再び現れる。解析学の背景については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。