解答例

STEP III 2011、第 3 問

純粋数学 • 3 次方程式を解く

> **STEP III 2011、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q3

鍵となる考え方

2 つの立方 $(x-\alpha)^3$ と $(x-\beta)^3$ を用いると、自由に選べる定数が a と b の 2 つ得られる。一方、x^2 の項をもたないモニック（monic）な三次式（cubic）に一致させるには 4 つの条件が課される。そこで、条件のうち 2 つを用いて a と b を求めると、残りの 2 つは二次方程式から得られる $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ についての事実そのものになっていなければならない。三次式が 2 つの立方の和として表されれば、それを 0 とおいた方程式は「ある比の 3 乗が定数に等しい」という形になり、立方根（cube root）を、それも 3 つすべてをとることで解ける。

解答

三次式を 2 つの立方の和として表す

$p \neq 0$ であるから、二次方程式 $pt^2 - qt + p^2 = 0$ について

$$\alpha+\beta = \frac{q}{p}, \qquad \alpha\beta = \frac{p^2}{p} = p,$$

が成り立ち、その判別式（discriminant）は $q^2 - 4p^3$ である。したがって、条件 $q^2 \neq 4p^3$ はちょうど $\alpha \neq \beta$ であることを意味している。また $\alpha\beta = p \neq 0$ であるから、どちらの解も 0 ではない。

展開すると

$$a(x-\alpha)^3 + b(x-\beta)^3 = (a+b)x^3 - 3(a\alpha+b\beta)x^2 + 3(a\alpha^2+b\beta^2)x - (a\alpha^3+b\beta^3).$$

これを $x^3 - 3px + q$ に一致させるには

$$a + b = 1, \qquad a\alpha + b\beta = 0, \qquad a\alpha^2 + b\beta^2 = -p, \qquad a\alpha^3 + b\beta^3 = -q.$$

が必要である。はじめの2つは a と b について一次である。$b = 1 - a$ を2番目の式に代入すると $a(\alpha - \beta) = -\beta$ となり、$\alpha \neq \beta$ であるから両辺を割ることができて

$$a = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

を得る。次に、残りの2つの条件が自動的に成り立つことを確かめる：

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta = -p,$$
$$a\alpha^3 + b\beta^3 = \frac{\beta\alpha^3 - \alpha\beta^3}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta(\alpha + \beta) = -p \cdot \frac{q}{p} = -q.$$

よって、a と b をこの値にとれば

$$x^3 - 3px + q = \frac{\beta}{\beta - \alpha}(x - \alpha)^3 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(x - \beta)^3,$$

となり、示すべき式が得られた。

$x^3 - 24x + 48 = 0$ を解く

ここでは $p = 8$、$q = 48$ であり、$q^2 = 2304 \neq 2048 = 4p^3$ であるから、上の結果が適用できる。二次方程式は $8t^2 - 48t + 64 = 0$、すなわち $t^2 - 6t + 8 = 0$ であり、その解は2と4である。$\alpha = 2$、$\beta = 4$ とおくと $a = 2$、$b = -1$ となるので

$$x^3 - 24x + 48 = 2(x - 2)^3 - (x - 4)^3.$$

（簡単に展開して確かめられる：$2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64$。）

> **考えてみよう** $2(x - 2)^3 = (x - 4)^3$ を、どうすれば解ける形に直せるだろうか？

$(x - 4)^3$ で割る。$x = 4$ は解ではない（$64 - 96 + 48 = 16$）ので、これは許される。方程式は

$$\left(\frac{x - 2}{x - 4}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

となる。$c = 2^{1/3}$ とおく。3乗すると $\frac{1}{2}$ になる複素数は $k = c^{-1}$、$c^{-1}\omega$、$c^{-1}\omega^2$ である。それぞれについて $\dfrac{x - 2}{x - 4} = k$ を解くと

$$x - 2 = kx - 4k \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 - 4k}{1 - k},$$

となり、$k \neq 1$ であるからこれは正当である。写像 $k \mapsto x$ は一対一（one-to-one）であるから、3 つの k の値から相異なる 3 つの解が得られ、これらが三次方程式の解のすべてでなければならない。

$k = c^{-1}$ のときは、分子と分母に c を掛けて

$$x = \frac{2c-4}{c-1} = \frac{2(2-2^{1/3})}{1-2^{1/3}},$$

となり、これが問題文に与えられた解である。$k = c^{-1}\omega$ のときは、（$\omega^3 = 1$ を用いて）分子と分母に $c\,\omega^{-1} = c\,\omega^2$ を掛けて

$$x = \frac{2c\omega^2-4}{c\omega^2-1} = \frac{2(2-2^{1/3}\omega^2)}{1-2^{1/3}\omega^2},$$

を得る。同様に $k = c^{-1}\omega^2$ からは

$$x = \frac{2(2-2^{1/3}\omega)}{1-2^{1/3}\omega}.$$

が得られる。よって 3 つの解は $j = 0, 1, 2$ に対する $x = \dfrac{2(2-2^{1/3}\omega^j)}{1-2^{1/3}\omega^j}$ である。

$p = r^2, q = 2r^3$ の場合

このとき $q^2 = 4r^6 = 4p^3$ であるから、これはまさにこの方法が除外している場合である。二次式 $r^2t^2 - 2r^3t + r^4 = r^2(t-r)^2$ は重解（repeated root）$t = r$ をもち、a と b を求めることはできない。しかし、二次方程式が重解をもつことは、三次方程式も重解をもつことを示唆している。実際、$x = r$ とすると $r^3 - 3r^3 + 2r^3 = 0$ であり、導関数（derivative）$3x^2 - 3r^2$ も $x = r$ で 0 になるので、$(x-r)^2$ は因数である。x^3 の項と定数項を比較して

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x-r)^2(x+2r).$$

を得る。解は $x = r$（重解）と $x = -2r$ である。

考えてみよう これらの解は、先ほどの公式から求められただろうか？

求められない。$\alpha = \beta$ のとき 2 つの立方は 1 つにまとまってしまうので、$a(x-\alpha)^3 + b(x-\alpha)^3$ は $(x-\alpha)^3$ の定数倍にしかなりえず、それでは $-3px$ に一致させるべき x の項が残らない。別の方法が必要だったのはこのためである。三次式を $(x-r)$ の累乗で表すと、代わりに何が起きているかがわかる：$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x-r)^3 + 3r(x-r)^2$ であり、二重解はちょうど二次方程式の重解 $t = r$ のところにある。

検算

- 実数解は $2(2-1.259921)/(1-1.259921) \approx -5.694644$ であり、これを代入すると誤差 10^{-13} 程度で $x^3 - 24x + 48 \approx 0$ となる。残りの2つは $2.847322 \pm 0.567212\,\mathrm{i}$ であり、これらも残差（residual）は0である。
- 3つの解の和は（x^2 の項がないので）0であり、積は -48 である：$-5.694644 \times (2.847322^2 + 0.567212^2) \approx -48.0$。
- 実数解が1つと複素数解が2つという結果は理論と合っている：$x^3 - 3px + q$ が3つの実数解をもつのは $q^2 < 4p^3$ のときに限られ、ここでは $q^2 > 4p^3$ である。
- 恒等式（identity）は数値的に検証できる：ランダムな2000組の (p, q) について、ランダムな複素数 x で恒等式を確かめ、また r のいくつかの値について因数分解（factorisation）$(x-r)^2(x+2r)$ を確かめた。

よくある間違い

- $\frac{1}{2}$ の実数の立方根だけをとり、その結果、解を1つしか求めないこと。三次方程式には3つの解があり、それらは3つの立方根から得られる。
- a, b のどちらがどちらの解に対応するかを取り違えること：a（$(x-\alpha)^3$ の係数）は分子に β をもつ。
- 分母を払うときに ω と ω^2 を取り違えること。2つの答えは互いに共役（conjugate）な組をなすので、どちらにしても最終的な解の集合は同じになる。

STEP のその先へ

これは、しばしばカルダノ（Cardano）とタルターリャ（Tartaglia）に帰せられる、16世紀の三次方程式の解法の一形態である：まず x^2 の項をもたない「被約」三次式（depressed cubic）に帰着させ、次に補助的な二次方程式（**分解式**（resolvent））を解く。ガロア理論（Galois theory）は、三次方程式や四次方程式がなぜこのような分解式をもち、一般の五次方程式がなぜそれをもたないのかを説明する。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これらの考え方へ向かう読みやすい道筋を与えてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。