解答例

STEP III 2011、第 2 問

純粋数学 • 多項式の有理数解

> **STEP III 2011、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q2

鍵となる考え方

$\mathrm{f}(p/q) = 0$ の両辺に q^{n-1} を掛けると、分母は一つを除いてすべて払われる。最高次の項は p^n/q となり、残りはすべて整数になる。したがって p^n/q は整数でなければならず、p と q は共通因数をもたないので、$q = 1$ が導かれる。そのあとは、各小問は**整数解**についての問題となり、大きさ、整除性、あるいは鮮やかに偶奇性（parity）によって整数解の存在を否定できる。

解答

冒頭の結果

p, q を互いに素（coprime）な整数で $q > 0$ とし、$\mathrm{f}(p/q) = 0$ であると仮定する。すると

$$0 = q^{n-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p\, q^{n-2} + a_0 q^{n-1},$$

となる。項 $a_k(p/q)^k$ は $a_k p^k q^{n-1-k}$ となり、$k \leq n-1$ であるすべての k について $n-1-k \geq 0$ だからである。最初の項以外はすべて整数であるから、

$$\frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1}\right)$$

は整数である。すなわち、q は p^n を割り切る。

> ? **考えてみよう** なぜ $q \mid p^n$ から $q = 1$ が従うのか。

$q > 1$ ならば、q はある素因数 r をもつ。このとき r は p^n を割り切り、r は素数である

から p 自身を割り切らなければならない。すると r は p と q の 1 より大きい公約数となり、これは不可能である。よって q は素因数をもたず、$q > 0$ であるから

$$q = 1.$$

を得る。ゆえに、$\mathrm{f}(x) = 0$ の有理数解 p/q はすべて p に等しく、整数である。（ここで f が**モニック**（monic、最高次の係数が 1）であることを用いている点に注意せよ。最高次の係数 a_n があると $a_n p^n/q$ が残り、$q \mid a_n$ としか結論できない。）

以下では二つの簡単な事実が役に立つ。m が整数解ならば

$$m\left(m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0,$$

であるから、m は a_0 を割り切る。また、$a_0 \neq 0$ であるから $m \neq 0$ である。

小問 (i)

数 $2^{1/n}$ は $x^n - 2 = 0$ の解であり、これは整数係数のモニック多項式で $a_0 = -2 \neq 0$ である。したがって、もし $2^{1/n}$ が有理数（rational）ならば、それは $m^n = 2$ を満たす整数 m となる。しかし

$$1^n = 1 < 2 < 4 \leq 2^n,$$

であるから、正の実数 $2^{1/n}$ は連続する整数 1 と 2 の間に（等号なしで）あり、整数にはなりえない。ゆえに、すべての $n \geq 2$ について $2^{1/n}$ は無理数（irrational）である。

小問 (ii)

ここでは $n = 3$、$a_0 = 1$ である。有理数解はどれも 1 を割り切る整数 m であるから、$m = \pm 1$ である。しかし

$$1^3 - 1 + 1 = 1 \neq 0, \qquad (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \neq 0.$$

よって $x^3 - x + 1 = 0$ は有理数解をもたない。

（別解：$m^3 - m = (m-1)m(m+1)$ は連続する二つの整数を含む積であるから偶数であり、$m^3 - m + 1$ は奇数となり、決して 0 にならない。この偶奇性の考え方こそ、小問 (iii) で必要となるものである。）

小問 (iii)

多項式 $x^n - 5x + 7$ は整数係数のモニック多項式で、定数項は $7 \neq 0$ であるから、有理数解はどれも整数 m である。$m^n - 5m + 7$ がつねに奇数であることを示す。

- m が偶数ならば、m^n と $5m$ は偶数であるから、$m^n - 5m + 7$ は偶数 − 偶数 + 奇数となり、奇数である。

- m が奇数ならば、m^n と $5m$ はともに奇数であるから、$m^n - 5m$ は偶数であり、$m^n - 5m + 7$ は奇数である。

いずれの場合も $m^n - 5m + 7$ は奇数であり、とくに 0 ではない。ゆえに、どの $n \geq 2$ についても $x^n - 5x + 7 = 0$ は整数解をもたず、したがって有理数解ももたない。

（代わりに 7 の約数を調べるのであれば、$m = \pm 1, \pm 7$ と**すべての** n について $m^n - 5m + 7 \neq 0$ を示すことになる。これでもうまくいくが、より煩雑である。偶奇性を用いれば、すべての n を一度に扱える。）

検算

- 有理数解を**もつ**多項式、たとえば $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ を試してみよう。解 3 と -2 は約束どおり整数であり、$a_0 = -6$ を割り切る。
- モニックでない多項式は、整数でない有理数解をもちうる。たとえば $2x - 1$ である。最高次の係数が 1 であることが重要なのはこのためである。
- 数値的には、$2^{1/2} \approx 1.414$ と $2^{1/3} \approx 1.260$ は 1 と 2 の間にある。また $x^3 - x + 1$ は $x = \pm 1$ で値 1 をとる。3000 個の無作為なモニック整数係数多項式をコンピュータで探索したところ、有理数解は整数のものしか見つからず、また $|m| \leq 200$、$2 \leq n \leq 14$ について $m^n - 5m + 7$ が奇数であることも確認された。

よくある間違い

- q^{n-1} ではなく q^n を掛けてしまう。すると $p^n = -q(\cdots)$ が得られ、これでもうまくいくが、その場合は $q \mid p^n$ であることを述べなければならない。q^{n-1} を掛ければ、分数 p^n/q によってこのことが明示される。
- 理由を述べずに「$q \mid p^n$ だから $q \mid p$」と主張してしまう。この議論は q の素因数を経由して行う。
- (iii) で、いくつかの n の値だけを調べてしまう。議論はすべての $n \geq 2$ について同時に成り立たなければならない。

STEP のその先へ

これはモニックの場合の**有理根定理**（rational root theorem）である。すなわち、モニック整数係数多項式の解である有理数は整数である。代数的整数論（algebraic number theory）の言葉でいえば、整数環は**整閉**（integrally closed）であり、モニック整数係

数多項式の解となる数は代数的整数（algebraic integer）とよばれる。(iii) の偶奇性の技法は、多項式を素数を法として還元する（reducing modulo a prime）ことの最も単純な場合であり、これは多項式が解をもたないことや既約（irreducible）であることを証明するための強力な道具である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は次の一歩として素晴らしい本であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）は代数的な側面を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。