解答例

STEP III 2011、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

> **STEP III 2011、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q11

鍵となる考え方

ねじった後も、各糸は天井の固定点から、円板の縁上で θ だけ回転した点へと張られている。したがって各糸の水平成分は円の**弦**（chord）になり、幾何的な関係は真上から見下ろすことで得られる。対称性によりすべての糸は同じふるまいをするので、鉛直方向のつり合いから張力（tension）が決まり、張力の水平成分の軸まわりのモーメント（moment）から偶力（couple）が求まる。円板を放した後は、エネルギー保存（energy conservation）がすべてを片づけてくれる。

解答

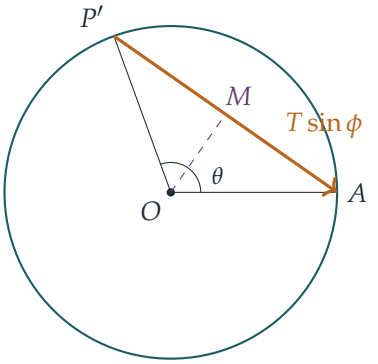
円板を剛体（rigid）の一様な薄板（lamina）、糸を軽くて伸びない（inextensible）ものとしてモデル化する。対称性により、すべての糸はぴんと張っていて、同じ張力 T と同じ傾き ϕ をもち、円板は水平を保ったまま中心が z 軸上にある。円板を θ だけ回転させると、円板は上昇して天井から深さ h の位置に来る。

糸の角度

P を通る糸は天井の $A = (a, 0, 0)$ に取り付けられている。回転後、その下端は

$$P' = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ -h).$$

にある。真上から見ると、A と P' はともに軸を中心とする半径 a の円周上にあり、中心 O においてなす角は θ である。よって、糸の水平面への射影は長さ $2a\sin\frac{1}{2}\theta$ の弦である。



真上から見た図。M は弦 $P'A$ の中点なので、OM は角 θ を二等分し、弦に垂直で、長さは $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$ である。糸そのものの長さは b で、鉛直方向と角 ϕ をなすから、その水平射影の長さは $b\sin\phi$ である。両者を等しいとおくと

$$b\sin\phi = 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

となり、求める式が得られる。鉛直射影からは円板の新しい深さが得られる：

$$h = b\cos\phi = \sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}.$$

$b > 2a$ であるから、これは実数である。$0 < \theta < \pi$ より $0 < \sin\frac{1}{2}\theta < 1$ であり、したがって $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$ である。

偶力

円板について鉛直方向の力のつり合いを考えると、n 本の等しい張力が重さを支えている：

$$nT\cos\phi = mg.$$

偶力 C は円板の面内にはたらくので、このつり合いには影響しない。

各張力は、鉛直成分と、P' から A へ向かう弦に沿った水平成分 $T\sin\phi$ とをもつ。鉛直成分は軸に平行なので、軸まわりのモーメントをもたない。水平成分は弦に沿ってはたらき、その弦と O との距離は $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$ である。どの糸の水平方向の引っ張りも円板を $\theta = 0$ の方へ戻そうとするので、n 個のモーメントはすべて同じ向きである。軸まわりのモーメントを考えると

$$\begin{aligned} C &= n\,T\sin\phi\cdot a\cos\tfrac{1}{2}\theta = mg\tan\phi\; a\cos\tfrac{1}{2}\theta \\ &= mg\,a\cos\tfrac{1}{2}\theta\cdot\frac{2a\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}} = \frac{mga^2\sin\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}, \end{aligned}$$

となる。ここで $nT = mg/\cos\phi$、次に $\tan\phi = b\sin\phi/(b\cos\phi)$、最後に $2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$ を用いた。これが求める大きさである。

静止状態からの解放

偶力を取り除くと、円板はねじれが戻りながら落下する。糸は伸びず、ぴんと張ったままなので仕事をしない。各糸の張力は、取り付け点の、天井の固定点に対する相対速度に垂直だからである。仕事をする力は重力だけなので、力学的エネルギーは保存される。

上の幾何的考察により、糸が鉛直な位置から円板が α だけ回転したとき、その深さは

$$z(\alpha) = \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} = \sqrt{b^2 - 2a^2(1 - \cos\alpha)}.$$

である。円板の運動エネルギー（kinetic energy）は $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ であり、軸まわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $I = \frac{1}{2}ma^2$ である。

> **考えてみよう** 糸が鉛直になったとき、円板の中心はまだ鉛直方向の速度をもっているだろうか？

もっていない。微分すると

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}\,\dot{\alpha} = -\frac{a^2 \sin\alpha}{z}\,\dot{\alpha},$$

となり、これは $\alpha = 0$ で 0 になる。その瞬間に糸は鉛直であり、円板は最も低い位置にあるので、そこでは運動エネルギーはすべて回転のエネルギーである。

円板は深さ $\sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$ から深さ b まで落下する。エネルギー保存により

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}ma^2\,\omega^2 = mg\left(b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\right),$$

すなわち

$$\frac{a^2\omega^2}{4g} = b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta},$$

となり、求める式が得られる。

検算

- **仮想仕事。** 偶力に逆らって円板をさらに $\delta\theta$ だけ回すと、円板は $-\delta z$ だけ上昇するので、$C = mg\,|\mathrm{d}z/\mathrm{d}\theta| = mg\,a^2 \sin\theta / z$ である。これはモーメントを考えて求めた偶力とちょうど一致する。
- **小さなねじれ。** θ が小さいとき $C \approx mga^2\theta/b$ であり、これは二本吊り（bifilar suspension、ここでは n 本吊り）のよく知られた復元偶力である。
- **数値計算。** n 本の糸を三次元空間に具体的に配置し、ランダムな a, b, θ, m, n に対して張力のモーメントを合計した。結果は公式と一致した。また、$a = 1$、$b = 3$、

$\theta = 2$、$g = 9.81$ として、解放後の運動を数値的に積分した。糸が鉛直になったときに $a^2\omega^2/(4g) = 0.51651$ が得られ、$3 - \sqrt{9 - 4\sin^2 1} = 0.51651$ と一致した。

よくある間違い

- 張力の水平成分の腕の長さを $a\cos\frac{1}{2}\theta$ ではなく a としてしまう。力は接線ではなく弦に沿ってはたらく。
- ねじると円板が**上昇する**ことを忘れる。この高さの変化こそが、最後の小問でのエネルギーの源である。
- 並進の運動エネルギー $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$ を含めておきながら、糸が鉛直のときにそれが消えることに気づかない。

STEP のその先へ

これは運動が拘束された、自由度（degree of freedom）1 の系である。深さはねじれ角の決まった関数なので、エネルギーは α と $\dot{\alpha}$ だけに依存する。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）は、この観察を運動方程式に変える。また、偶力がちょうど $mg\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}\alpha$ になる理由も説明してくれる。これが仮想仕事の原理（principle of virtual work）である。$\alpha = 0$ のまわりで線形化（linearise）すると単振動（simple harmonic）のねじれ振動が得られ、これが二本吊りを用いて慣性モーメントを測定する原理である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転とエネルギーを用いた方法をこの水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。