解答例

STEP III 2011、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

STEP III 2011、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s3-q10

鍵となる考え方

2 つの粒子には外部から水平方向の力がはたらかないので、その重心（centre of mass）は撃力（impulse）によって定まる一定の速さで動く。重心に対する相対的な運動を見ると、糸の伸び（extension）は単振動（simple harmonic motion）に従い、糸が張っているのはちょうど半周期の間である。運動を「重心」と「伸び」に分けて考えれば、どの答えもほとんど手間をかけずに得られる。

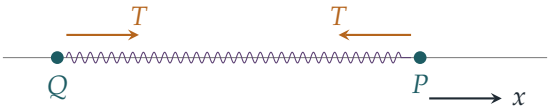
解答

モデルと設定

粒子はなめらかな水平面上を動くので、粒子にはたらく水平方向の力は軽い糸の張力（tension）だけであり、それらは大きさが等しく向きが逆である。直線 QP を x 軸とし、Q から P へ向かう向きを正とする。また、最初 Q は $x = 0$、P は $x = a$ にあるとする。撃力を加えてから時間 t 後のそれぞれの位置を x_P, x_Q とし、

$$e = (x_P - x_Q) - a$$

を糸の伸びとする。撃力の直後には $\dot{x}_P = u, \dot{x}_Q = 0, e = 0$ であり、$\dot{e} = u > 0$ であるから、糸はただちに張る。



糸が張っている間、フックの法則（Hooke's law）により張力は

$$T = \frac{\lambda e}{a} = \frac{\frac{1}{2}ma\omega^2\, e}{a} = \tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

となる。張力は P を Q の方へ引き戻し、Q を P の方へ前向きに引く：

$$m\ddot{x}_P = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 e, \qquad m\ddot{x}_Q = +\tfrac{1}{2}m\omega^2 e.$$

重心

2 つの式を足すと $\ddot{x}_P + \ddot{x}_Q = 0$ である。したがって、$\bar{x} = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$ にある重心 G は、初期値に等しい一定の速度

$$\dot{\bar{x}} = \tfrac{1}{2}(u + 0) = \tfrac{1}{2}u.$$

で動く。（これは運動量保存（conservation of momentum）にほかならない。全運動量 mu を質量 $2m$ が分け合っているのである。）

伸び

2 つの式を引くと、

$$\ddot{e} = \ddot{x}_P - \ddot{x}_Q = -\omega^2 e.$$

これは角振動数（angular frequency）ω の単振動である。$e(0) = 0, \dot{e}(0) = u$ より、

$$e = \frac{u}{\omega}\sin\omega t.$$

考えてみよう 角振動数が $\omega/\sqrt{2}$ や $\sqrt{2}\,\omega$ ではなく ω になるのはなぜか。

各粒子が受ける力は $\frac{1}{2}m\omega^2 e$ であるが、e が変化するのは**両方の**粒子が動くからである。2 つの式を引くと、加速度が足し合わされる。言い換えると、等しい質量 m の 2 物体の換算質量（reduced mass）は $\frac{1}{2}m$ であり、糸のばね定数は $\lambda/a = \frac{1}{2}m\omega^2$ であるから、$\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 / \frac{1}{2}m$ となる。弾性率はこれがきれいに求まるように選ばれているのである。

次に糸の長さが a になるのは再び $e = 0$ となるとき、すなわち $t > 0$ で初めて $\sin\omega t = 0$ となるときであり、

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

である。$0 < t < \pi/\omega$ の間はつねに $e > 0$ であるから、糸は確かに張っており、上の運動方程式が成り立つ。

移動距離

各位置を、重心に間隔の半分を足したもの、または引いたものとして書くと、

$$x_P = \bar{x} + \tfrac{1}{2}(a+e), \qquad x_Q = \bar{x} - \tfrac{1}{2}(a+e).$$

t_1 では再び $e = 0$ となるので、各粒子は G とちょうど同じだけ、すなわち

$$\tfrac{1}{2}u \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi u}{2\omega}.$$

だけ動いている。この変位が移動距離に等しいことを確かめるため、どちらの粒子も向きを変えないことを確認する。微分すると、

$$\dot{x}_P = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1+\cos\omega t), \qquad \dot{x}_Q = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1-\cos\omega t),$$

であり、どちらもすべての t で ≥ 0 である。よって各粒子は前方にのみ進み、それぞれ距離 $\dfrac{\pi u}{2\omega}$ だけ移動したことになり、題意は示された。

速さ

$t_1 = \pi/\omega$ では $\cos\omega t_1 = -1$ であるから、

$$\dot{x}_P = 0, \qquad \dot{x}_Q = u.$$

となる。したがって P は一瞬静止し、Q は速さ u で P の方へ動いている。2 つの粒子は速度をちょうど入れ替えたのであり、これは等しい質量の完全弾性衝突（perfectly elastic collision）とまったく同じである。これは偶然ではない。運動量は保存され、蓄えられた弾性エネルギーは完全に運動エネルギーとして戻されたのである。

衝突までの時間

t_1 の後、Q は P の方へ動いているので、間隔は a より小さくなる。糸はたるんで力を及ぼさず、どちらの粒子にも水平方向の力ははたらかない。よって P は静止したままであり、Q は P から距離 a の位置から一定の速さ u で動く。Q はさらに時間 a/u 後に P に達する。撃力から衝突までの時間の合計は

$$\frac{\pi}{\omega} + \frac{a}{u}.$$

である。

検算

- 運動量：t_1 での全運動量は $m\cdot 0 + mu = mu$ であり、最初と同じである。エネルギー：どちらの時刻でも運動エネルギーは $\frac{1}{2}mu^2$ であり、糸はどちらのときも自然長である。

- 次元：u/ω は長さ、a/u は時間であり、そうなるべきとおりである。
- $m = a = \omega = u = 1$ として運動方程式を数値的に解いた。糸は $t = 3.14159$ でたるみ、そのとき各粒子は $1.57080 = \pi/2$ だけ動いていた。そのときの速さは 0 と 1 であり、衝突は $t = 4.14159 = \pi + 1$ で起きた。

よくある間違い

- P が固定点につながれているものとして扱うこと。これでは角振動数が $\omega/\sqrt{2}$ となり、時間を誤る。糸の両端はどちらも動く。
- t_1 の後も単振動が続くとしてしまうこと。糸が a より短くなるとたるむので、運動は等速運動になる。
- 最後の段階をまるごと忘れること。衝突は、糸が自然長に戻ってからさらに a/u 後に起こる。

STEP のその先へ

2 体問題（two-body problem）を、重心の運動と、換算質量 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ に支配される相対位置の運動とに分けることは、大学 1 年の力学で最も役に立つ技法の一つである。これにより、惑星の軌道、振動する 2 原子分子、衝突する粒子などが 1 体問題に帰着される。ここでは弾性糸が「柔らかい」衝突の役割を果たしており、その衝突は時間 π/ω だけ続くが、瞬間的な弾性衝突とまったく同じ結果をもたらす。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、2 体問題の帰着と換算質量が丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。