解答例

STEP III 2011、第 1 問

純粋数学 ・ 階数低下法

> **STEP III 2011、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q1

鍵となる考え方

小問 (i) は変数分離形（separable）の方程式であり、これには理由がある。$(*)$ に $y = ze^{-x}$ を代入したときに現れるのが、まさにこの方程式なのである。z そのものを含む項は打ち消し合い、z' と z'' だけを含む方程式が残る。これは $u = z'$ についての 1 階の方程式である。これが**階数低下法**（reduction of order）である。すなわち、解を 1 つ（e^{-x}）知っていれば、もう 1 つの解を求めることができる。小問 (iii) では、右辺のある場合に同じ置き換えを行う。すると線形 1 階方程式が得られ、これは積分因子（integrating factor）によって解ける。

解答

以下では $x \neq -1$ となる区間で考える。したがって $x+1$ で割ってよい。

小問 (i)

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1},$$

であるから、（$u \neq 0$ のとき）変数を分離すると

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|u| = x + \ln|x+1| + c.$$

指数をとると $|u| = e^c\,|x+1|\,e^x$ となる。符号と因子 e^c はまとめて 1 つの任意定数にでき、また $u = 0$ も解であるから、一般解（general solution）は

$$u = C(x+1)e^x, \qquad C \text{ は任意定数}$$

である。

小問 (ii)

$y = ze^{-x}$ とすると、積の微分法（product rule）により

$$y' = (z' - z)e^{-x},$$
$$y'' = (z'' - z')e^{-x} - (z' - z)e^{-x} = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

これらを $(*)$ に代入し、0 でない因子 e^{-x} を約すと

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)(z'' - 2z' + z) + x(z' - z) - z \\ &= (x+1)z'' + (-2(x+1) + x)z' + ((x+1) - x - 1)z \\ &= (x+1)z'' - (x+2)z'. \end{aligned}$$

z の項は完全に消えた。$u = \dfrac{dz}{dx}$ とおき、$x+1$ で割ると

$$\frac{du}{dx} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = 0,$$

となり、これは求めるとおり $\dfrac{dz}{dx}$ についての 1 階方程式である。しかもこれは小問 (i) の方程式そのものである。

考えてみよう なぜ z の項は消えたのだろうか。それを前もって予想できただろうか。

z の係数は、$z = 1$ とおいたとき、つまり $y = e^{-x}$ を $(*)$ に当てはめてみたときに得られるものである。$(x+1)e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = 0$ であるから、$y = e^{-x}$ はすでに解であり、したがって定数の z は方程式を満たさなければならず、z 単独の項が残ることはありえない。この置き換えが選ばれたのはそのためである。

小問 (i) より $z' = C(x+1)e^{x}$ である。部分積分（integration by parts）により

$$\int (x+1)e^{x}\,dx = (x+1)e^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} + \text{const},$$

となるので

$$z = Cxe^{x} + B.$$

よって $y = ze^{-x} = Cx + Be^{-x}$ であり、C を A と書き直すと

$$y = Ax + Be^{-x},$$

を得る。ここで A と B は任意定数である。任意の y は $z = ye^{x}$ として ze^{-x} の形に書けるから、$(*)$ のすべての解はこのようにして得られる。したがって、求めるとおり、これが一般解である。

小問 (iii)

同じ置き換えを行うと変わるのは右辺だけであり、右辺は $(x+1)^2$ を e^{-x} で割ったものになる：

$$(x+1)z'' - (x+2)z' = (x+1)^2\mathrm{e}^x.$$

$u = z'$ とおき、$x+1$ で割ると

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

これは線形（linear）である。小問 (i) より $(x+1)\mathrm{e}^x$ は斉次方程式（homogeneous equation）の解であるから、その逆数 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$ が積分因子となる。（これは符号を除いて $\exp(-\int \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x)$ に等しい。）両辺に掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u\,\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad u = (x+1)\mathrm{e}^x(x+k)$$

となる。ここで k は定数である。よって

$$z' = (x^2+x)\mathrm{e}^x + k(x+1)\mathrm{e}^x.$$

第 2 項を積分すると、小問 (ii) と同様に $kx\mathrm{e}^x$ となる。第 1 項については、部分積分を 2 回行って

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - (2x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + \text{const} = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + \text{const}.\end{aligned}$$

したがって $z = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + kx\mathrm{e}^x + B$ であり、

$$y = z\mathrm{e}^{-x} = x^2 - x + 1 + kx + B\mathrm{e}^{-x}.$$

$-x$ は任意の kx に吸収されるので、$A = k-1$ とおくと、一般解は

$$y = x^2 + 1 + Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

である。ここで A と B は任意定数である。

別解として、右辺が 2 次式であることから、特殊解（particular integral）として $y = px^2+qx+r$ を試してもよい。代入すると $(x+1)2p + x(2px+q) - (px^2+qx+r) = px^2 + 2px + 2p - r$ となり、これを x^2+2x+1 と比較すると $p = 1, r = 1$ を得る。q は自由である（x が余関数（complementary function）だからである）。これに小問 (ii) の余関数を加えると、同じ答えが得られる。

検算

$y = x^2 + 1$ を直接代入する。$y' = 2x$、$y'' = 2$ であるから、左辺は $2(x+1) + 2x^2 - x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ となり、確かに成り立つ。数値的にも、A, B を無作為に選び、$x \in (-0.9, 3)$ を無作為にとって、$y = x^2 + 1 + Ax + Be^{-x}$ の導関数を有限差分（finite difference）で近似すると、方程式はおよそ 3×10^{-6} 以内の誤差で満たされる。同じ検査により小問 (i) と (ii) も確認できる。

よくある間違い

- y'' を間違える。正しくは $(z'' - 2z' + z)e^{-x}$ であり、z の符号は**プラス**である。ここで符号を誤ると、余計な z の項が残ってしまう。
- 小問 (iii) で因子 e^{-x} を約すときに、右辺に e^{x} を掛けるのを忘れる。
- 定数を落とす。最終的な答えには任意定数が 2 つ必要であり、それぞれの積分から 1 つずつ生じる。

STEP のその先へ

階数低下法は一般的な手法である。y_1 が線形 2 階方程式の解であれば、$y = y_1 v$ とおくと必ず v の項が消え、v' についての 1 階方程式が残る。これはまた、任意の右辺に対して特殊解を与える**定数変化法**（variation of parameters）の背後にある考え方でもある。どちらも Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）でわかりやすく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。