解答例

STEP II 2011、第 9 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP II 2011、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

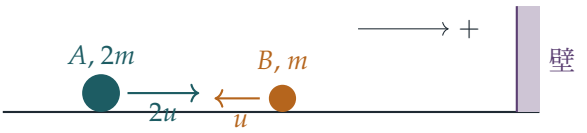
step.maths.org/questions/11-s2-q9

鍵となる考え方

ここでの衝突はすべて直接衝突（direct collision）であるから、どの衝突も同じ二つの式、すなわち運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）によって決まる。本当に危ないのは符号だけである。最初に正の向きを一つ（壁に向かう向き）に定め、すべての速度をその向きの符号付きの数として書けば、計算はおのずと進む。最後の主張は、ある式が正であり続けることを示す問題に帰着する。その式は f について一次であるから、f の範囲の両端だけを調べればよい。

解答

モデル化。 A と B を滑らかな（smooth）平面上の質点（particle）とみなす。したがって衝突の瞬間を除いて水平方向の力ははたらかない。また壁も滑らかであるから、壁は B の速度の向きを反転させる（大きさは f 倍になる）だけである。最初の衝突のあと B は壁に衝突するので、壁は B の側、すなわち A がはじめに動いていた向きに B より先にある。この向きを正とする。すると直線上の並び順はつねに A、B、壁である。



1 回目の衝突

衝突前、A の速度は $2u$、B の速度は $-u$ である。衝突後の速度をそれぞれ v_A、v_B とする。運動量は保存されるから

$$2m(2u) + m(-u) = 2m\,v_A + m\,v_B \quad \Longrightarrow \quad 2v_A + v_B = 3u.$$

近づく速さは $2u - (-u) = 3u$ である。B は A の前方にあるので、遠ざかる速さは $v_B - v_A$ であり、ニュートンの反発の法則により

$$v_B - v_A = 3eu.$$

第 1 式から第 2 式を引くと $3v_A = 3u - 3eu$ となるので

$$v_A = (1-e)u, \qquad v_B = (1+2e)u.$$

どちらも ≥ 0 であるから、衝突後 A は速さ $(1-e)u$ で壁に向かって動き（$e = 1$ のときは静止する）、B は速さ $(1+2e)u$ で壁に向かって動く。これはその後 B が壁に達することと矛盾しない。

壁

壁は滑らかで衝突は直接衝突であるから、B は直線に沿って速さ $f(1+2e)u$ ではね返る。その速度は $-f(1+2e)u$ となる。一方 A には何も力がはたらかないので、速度 $(1-e)u \geq 0$ で動き続けている。B は今や A に向かって動いているので、二つは必ず再び出会う。

2 回目の衝突

2 回目の衝突の直前の速度は

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ -f(1+2e)u.$$

衝突後の速度を w_A、w_B とする。運動量保存より

$$2w_A + w_B = 2(1-e)u - f(1+2e)u.$$

考えてみよう 今回、反発の式はどちら向きに書けばよいだろうか。

B は依然として壁に近い側の質点であるから、遠ざかる速度は依然として $w_B - w_A$ である。近づく速さは A の速度から B の速度を引いたもの、すなわち $(1-e)u + f(1+2e)u$ である。よって

$$w_B - w_A = e[(1-e)u + f(1+2e)u].$$

w_B だけを取り出すために、この式の 2 倍を運動量の式に加える：

$$\begin{aligned} 3w_B &= 2(1-e)u - f(1+2e)u + 2e(1-e)u + 2ef(1+2e)u \\ &= 2(1-e)(1+e)u + f(1+2e)(2e-1)u \\ &= 2(1-e^2)u - (1-4e^2)fu. \end{aligned}$$

したがって

$$w_B = \tfrac{2}{3}(1-e^2)u - \tfrac{1}{3}(1-4e^2)fu,$$

であり、これは正の向き、すなわち壁に向かう向きに測った値である。これが求める結果である。

B はつねに壁に向かって動く

$0 < e \leq 1$ かつ $0 < f \leq 1$ のすべてに対して $w_B > 0$ であることを示さなければならない。$u > 0$ であるから、これは

$$g(f) = 2(1-e^2) + (4e^2-1)f > 0.$$

を示すことと同じである。項 $1-4e^2$ はどちらの符号もとりうるので、単純に無視することはできない。そこで e を固定すると g は f の一次関数であり、

$$g(0) = 2(1-e^2) \geq 0, \qquad g(1) = 2 - 2e^2 + 4e^2 - 1 = 1 + 2e^2 > 0.$$

であることに注意する。$[0,1]$ 上の一次関数は両端の値の重み付き平均である：$g(f) = (1-f)\,g(0) + f\,g(1)$。$0 < f \leq 1$ のとき第 1 項は ≥ 0 であり、第 2 項は（$f > 0$ かつ $g(1) > 0$ より）真に正であるから、$g(f) > 0$ となる。よって $w_B > 0$ であり、e と f の値によらず、2 回目の衝突のあと B は壁に向かって動く。

検算

- $e = f = 1$（全過程で完全弾性（perfectly elastic））のとき、A は 1 回目の衝突でぴたりと止まり、B は $3u$ で出ていき、$3u$ で戻ってきて、質量が自分の 2 倍の静止した質点に衝突する。公式は $w_B = 0 + u = u$ を与え、これは弾性衝突の結果 $\frac{m-2m}{3m}(-3u) = u$ と一致する。
- $e = f = \frac{1}{2}$ のとき、公式は $w_B = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}u = \frac{1}{2}u$ を与える。位置と衝突を一歩ずつ追うシミュレーションでも同じ値 $0.5u$ が得られる。
- 符号について最も厳しい場合は、$e = 1$ で f が小さいときである。このとき $w_B = fu$ であり、小さいがやはり正である。

よくある間違い

- 2 回目の衝突で符号付きの速度ではなく速さを用いてしまい、その結果 B のはね返りの速度の符号を誤る。
- B が「壁から来た」からといって、反発の式を $w_A - w_B$ と書いてしまう。直線上の質点の並び順は変わっていないので、遠ざかる速度は依然として $w_B - w_A$ である。
- $1 - 4e^2 > 0$ を仮定して $w_B > 0$ を主張してしまう。これは $e > \frac{1}{2}$ のとき成り立たない。だからこそ議論では $f \leq 1$ を用いる必要がある。

STEP のその先へ

反発は経験則に基づくモデルである。大学 1 年の講義では、より見通しのよい重心系（centre-of-mass frame）の考え方とあわせてこれを学ぶ。重心系では全運動量が 0 であり、反発係数（coefficient of restitution）e の衝突は両方の速度を単に $-e$ 倍するだけである。これを使えば、1 回目の衝突のような結果はほとんど即座に得られる。壁との繰り返し衝突は、ビリヤードの問題や数え上げの議論にも再び現れる。たとえば、二つのブロックと壁の間の衝突回数が π の各桁を与えるという有名な問題がある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量と衝突をこのような考え方で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。