解答例

STEP II 2011、第 8 問

純粋数学 ・ 円の伸開線

> **STEP II 2011、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q8

鍵となる考え方

どの瞬間においても、糸は二つの部分からなる。一つは円の弧（arc）であり、その長さは角度から直ちに読み取れる。もう一つは接線（tangent）に沿って円から離れていく直線部分である。糸の全長は一定なので、直線部分の長さは全長から弧の長さを引いた残りである。また接線は半径に垂直であるから、ベクトルを使えば B の位置は容易に求まる。最後の面積については、糸が掃く領域全体が「外側の枝の下の面積から、内側の枝の下の面積と半円の面積を引いたもの」になっていることに注目する。

解答

媒介変数表示

糸が円から離れる点を $P = (\cos t, \sin t)$ とする。すなわち t は x 軸の正の向きから OP までの角である。最初は $P = A = (-1, 0)$ なので $t = \pi$ である。糸が円の上側に巻きついていくにつれて、P は時計回りに動き、t は 0 まで減少する。

糸のうち円に接している部分は、角 π から角 t までの弧である。半径は 1 なので、この弧の長さは $\pi - t$ である。糸の長さは π なので、直線部分 PB の長さは

$$\pi - (\pi - t) = t.$$

である。糸はぴんと張っているので、PB は P における円の接線であり、$OP = (\cos t, \sin t)$ に垂直である。OP に垂直な単位ベクトル（unit vector）は $\pm(\sin t, -\cos t)$ の二つである。最初（$t = \pi$）は糸は A から真上、すなわち $(0, 1) = (\sin \pi, -\cos \pi)$ の向きを向い

ており、連続性から符号は途中で変わらない。したがって

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + t\,(\sin t, -\cos t),$$

すなわち

$$x = \cos t + t\sin t, \qquad y = \sin t - t\cos t,$$

となり、求める式が得られた。（確認：$t = \pi$ のとき $(-1, \pi)$ となり、これは B の最初の位置である。また $t = 0$ のとき $(1, 0)$ となり、これは B が円に達する点である。）

x の最大値

微分すると、$\pm\sin t$ の項と $\pm\cos t$ の項が打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \pi$ において、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\cos t$ は $t < \frac{\pi}{2}$ のとき正、$t > \frac{\pi}{2}$ のとき負である。よって t が $[0, \pi]$ を動くとき、x は増加したのち減少し、最大となるのは

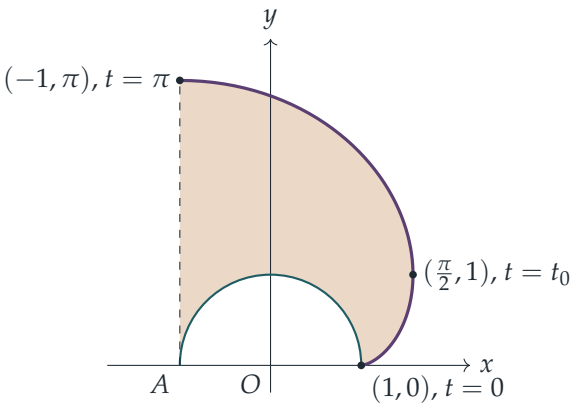
$$t_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{このとき} (x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

のときである。

概形

二つの事実が役に立つ。第一に、$0 < t \leq \pi$ において $y > 0$ である。実際、$t \leq \frac{\pi}{2}$ ならば $\tan t > t$ より $y = \cos t\,(\tan t - t) > 0$ であり（$t = \frac{\pi}{2}$ のときは直接 $y = 1$）、$t > \frac{\pi}{2}$ ならば $\cos t < 0$ なので y の二つの項はともに非負で、$\sin t - t\cos t > 0$ となる。第二に、$x^2 + y^2 = 1 + t^2$ なので、B は常に円の外側にあり、円からの離れ具合は t とともに大きくなる。さらに $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t\sin t \geq 0$ なので、y は t とともに単調に増加する。

したがって曲線は $(1, 0)$ から出発し（ここで $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan t = 0$ なので、x 軸から水平に離れる）、最も右の点 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ まで上っていき、そこで鉛直になる。その後、円の上方を回り込んで $(-1, \pi)$ に戻り、そこで再び水平になる。この曲線は円の**伸開線**（involute）である。



曲線、糸の最初の位置（破線）、半円で囲まれた網かけの領域が、糸が掃く領域である。

$\pi \geq t \geq t_0$ の部分の面積

曲線のこの部分では、x は $\frac{\pi}{2}$（$t = \frac{\pi}{2}$ のとき）から -1（$t = \pi$ のとき）まで減少し、$y > 0$ である。よってこの弧と x 軸の間の面積は

$$\int_{-1}^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{\pi/2} y\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} (t^2\cos^2 t - t\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t,$$

である。ここで積分の上端と下端を入れ替えて負号を吸収した。必要な積分は二つであり、どちらも倍角の公式（double-angle formula）を使ったあとに部分積分（integration by parts）で求められる。$\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$、$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ と書く。部分積分により

$$\int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = -\tfrac{1}{2}t\cos 2t + \tfrac{1}{4}\sin 2t,$$
$$\int t^2\cos 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t - \int t\sin 2t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}t^2\sin 2t + \tfrac{1}{2}t\cos 2t - \tfrac{1}{4}\sin 2t.$$

である。$t = \pi$ では $\sin 2t = 0$、$\cos 2t = 1$ であり、$t = \frac{\pi}{2}$ では $\sin 2t = 0$、$\cos 2t = -1$ である。したがって

$$\int_{\pi/2}^{\pi} t\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \tfrac{1}{2}\Big(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{3\pi}{8},$$
$$\int_{\pi/2}^{\pi} t^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{3}t^3\Big]_{\pi/2}^{\pi} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}t\cos 2t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7\pi^3}{48} + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8}.$$

よって求める面積は

$$\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8} - \Big(-\frac{3\pi}{8}\Big) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}.$$

である。

糸が掃く領域の面積

考えてみよう $t \geq t_0$ の部分の弧の下の領域は、糸が掃く領域より大きい。何を取り除かなければならないか。

先ほど求めた面積は、$-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における外側の弧（$t_0 \leq t \leq \pi$）と x 軸の間にあるすべての部分の面積である。糸が掃く領域は、ここからその下にある二つの部分を除いたものである。一つは上半分の半円で、面積は $\frac{\pi}{2}$ である。もう一つは、$1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における内側の弧（$0 \leq t \leq t_0$）と x 軸の間の細長い部分である。内側の弧は円の外側にあり（$t > 0$ のとき $x^2 + y^2 = 1 + t^2 > 1$ であるから）、かつ外側の弧より下にあるので、これら二つの部分は重ならず、引き算をしてよい。

内側の弧では x は t とともに増加するので、細長い部分の面積は

$$\int_0^{\pi/2} y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (t \sin t \cos t - t^2 \cos^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

である。同じ原始関数（antiderivative）を用い、今度は下端を $t = 0$ とすると（ここで $\sin 2t = 0$、$\cos 2t = 1$）、

$$\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2} t \cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$
$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{24} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2} t \cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

となるので、細長い部分の面積は $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^3}{48}$ である（約 0.14 であり、小さな正の値なので安心できる）。したがって糸が掃く領域の面積は

$$\left(\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi^3}{48} = \frac{\pi^3}{6}.$$

である。

検算

- 最後の答えにはもっと手際のよい求め方がある。t が δt だけ減少するとき、糸の直線部分（長さ t）は、ほぼ固定されているとみなせる点のまわりに角 δt だけ回転し、面積がおよそ $\frac{1}{2} t^2\,\delta t$ の細い扇形（sector）を掃く。これらを足し合わせると $\int_0^{\pi} \frac{1}{2} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6}$ となり、結果は一致する。
- 数値的な確認：シンプソンの公式（Simpson's rule）により外側の弧の下の面積は 6.87794 となり、$\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}$ と一致する。また網かけの領域の境界に靴ひも公式（shoelace formula）を適用すると 5.16771 $\approx \frac{\pi^3}{6}$ が得られる。

よくある間違い

- 直線部分の長さを $\pi - t$ としてしまう（それは弧の長さである）、あるいは二つの接線方向のうち誤った方を選んでしまう。$t = \pi$ の場合を確認すれば、どちらの誤りにも気づける。
- その弧に沿って x が減少することに気づかず、積分区間を t_0 から π のままにしてしまう。こうすると負の「面積」が得られる。
- 内側の弧の下にある小さな領域を忘れてしまう。こうすると掃く面積が $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}$ となってしまう。

STEP のその先へ

ある曲線からほどけていく糸の端が描く曲線を伸開線といい、糸がほどけていく元の曲線をその縮閉線（evolute）という。B における伸開線の曲率中心（centre of curvature）は、ちょうど糸が円から離れる点 P である。円の伸開線は、ほとんどの歯車の歯形に用いられている。そのような二つの歯は、一定の速度比で互いに転がり合うからである。検算で用いた「細い扇形」の議論は、極座標での面積公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ を姿を変えて用いたものにほかならない。曲率やこの種の曲線についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、その背後にある厳密な微積分については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。