解答例

STEP II 2011、第 7 問

純粋数学 • 数列と級数

> **STEP II 2011、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q7

鍵となる考え方

数列を項ごとに扱ってはならない。すべての和を λ のべきの和と μ のべきの和に分け、それぞれに等比級数（geometric series）の和の公式を用いる。2 つの数は $\lambda+\mu=2$ と $\lambda\mu=-1$ を満たすので、$x^2=2x+1$ の解である。このただ 1 つの 2 次方程式によって、扱いにくい分母がすべて簡単になる。もう 1 つの道具は 2 乗することである。b_k^2 と a_k^2 はどちらも a_{2k} に定数を加えた形になる。

解答

まず、全体を通して用いる事実を挙げておく。

$$\lambda-1=\sqrt{2}, \qquad \mu-1=-\sqrt{2}, \qquad \lambda\mu=1-2=-1, \qquad \lambda-\mu=2\sqrt{2}.$$

また、$a_0=2$、$b_0=0$ である。

小問 (i)

$\lambda\neq 1$ かつ $\mu\neq 1$ であるから、それぞれの和に等比級数の和の公式を用いることができる。

$$\sum_{r=0}^{n}\lambda^r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}, \qquad \sum_{r=0}^{n}\mu^r=\frac{\mu^{n+1}-1}{\mu-1}=-\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}.$$

1 つ目の和から 2 つ目の和を引くと、

$$\sum_{r=0}^{n}b_r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{a_{n+1}-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{n+1},$$

となり、示すべき式が得られた。代わりに 2 つの和を足すと、-1 どうしが打ち消し合う。

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} a_r = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b_{n+1}.}$$

（簡単な確認：$n=0$ のとき、この式は $a_0 = b_1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2$ となり、正しい。）

小問 (ii)

小問 (i) より、内側の和は $b_{m+1}/\sqrt{2}$ である。よって

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{2n} b_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{2n+1} b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=0}^{2n+1} b_s,$$

となる。ここで最後の変形ができるのは $b_0 = 0$ だからである。次に、小問 (i) で n の代わりに $2n+1$ とすると、

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2} + \frac{a_{2n+2}}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1. \qquad (*)$$

を得る。

考えてみよう a_{2n+2} と b_{n+1}^2 をどのように結びつければよいか。

2 乗し、交差項には $\lambda\mu = -1$ を用いる。

$$b_{n+1}^2 = \lambda^{2n+2} + \mu^{2n+2} - 2(\lambda\mu)^{n+1} = a_{2n+2} - 2(-1)^{n+1}, \qquad a_{n+1}^2 = a_{2n+2} + 2(-1)^{n+1}.$$

n が奇数ならば $n+1$ は偶数なので、$b_{n+1}^2 = a_{2n+2} - 2$ である。よって $(*)$ は $\frac{1}{2}(a_{2n+2} - 2) = \frac{1}{2}b_{n+1}^2$ に等しく、示すべき式が得られた。

n が偶数ならば $(-1)^{n+1} = -1$ なので、今度は a_{n+1}^2 が $a_{2n+2} - 2$ に等しい。したがって

$$\boxed{n \text{ が偶数}: \quad \sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2}$$

であり、これは $\frac{1}{2}b_{n+1}^2 - 2$ と同値である。

小問 (iii)

小問 (i) と、続いて小問 (ii) の 2 乗の恒等式を用いると、

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \tfrac{1}{2}b_{n+1}^2 = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}.$$

2 つ目の和についても再び 2 つの等比級数に分ける。今回は公比が λ^2 と μ^2 である。

$$\sum_{r=0}^{n} \lambda^{2r+1} = \lambda\,\frac{\lambda^{2n+2}-1}{\lambda^2-1}.$$

考えてみよう λ^2-1 は簡単にできるか。

できる。$\lambda^2 = 2\lambda+1$ であるから $\lambda^2-1 = 2\lambda$ となり、因数 λ が約分されて、和は $\frac{1}{2}(\lambda^{2n+2}-1)$ となる。μ も同じ 2 次方程式を満たすので、$\mu^2-1=2\mu$ であり、μ の和は $\frac{1}{2}(\mu^{2n+2}-1)$ となる（$\mu^2 \neq 1$ であるから、公式は適用できることに注意する）。2 つを足すと、

$$\sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_{2n+2}-2\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1.$$

したがって

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 - \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}\right) - \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1\right) = 1 + (-1)^n.$$

n が偶数ならばこれは 2 に等しく、示すべき式が得られた。n が奇数ならば 0 であるから、

$$n \text{ が奇数}: \quad \left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1}.$$

検算

a_n は $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ を満たす整数であり、$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \ldots$ と続く。小問 (ii) で $n=3$ とすると、部分和 $2, 4, 10, 24, 58, 140, 338$ の合計は 576 である。$b_4 = 24\sqrt{2}$ であるから $\frac{1}{2}b_4^2 = 576$ となり、一致する。小問 (iii) で $n=2$ とすると、$(2+2+6)^2 - (2+14+82) = 100-98 = 2$ である。$n=1$ では $(2+2)^2-(2+14) = 0$ である。3 つの小問すべてについて、偶奇の両方の場合を含め、24 までのすべての n でコンピュータによる確認を行った。

よくある間違い

- $\mu - 1 = -\sqrt{2}$ が負であることを忘れ、小問 (i) で a と b の役割を入れ替えてしまう。
- $(-1)^{n+1}$ とすべきところを $(\lambda\mu)^{n+1} = 1$ と書いてしまう。この符号こそが奇数と偶数で場合分けする理由そのものである。
- 小問 (ii) で b_{m+1} の和の添字をずらす際、和を 0 から始められるのは $b_0 = 0$ だからであることに気づかない。

STEP のその先へ

2 つの数列はどちらも線形漸化式（linear recurrence）$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ を満たし、その特性方程式（characteristic equation）は $x^2 = 2x + 1$ である。したがって λ と μ はその解であり、a_n と b_n は特殊解である。$\lambda^n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ であるから、恒等式 $\lambda^n \mu^n = (-1)^n$ は $a_n^2 - b_n^2 = 4(-1)^n$ となる。これは環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ におけるペル型方程式（Pell-type equation）である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）では、このような単数（unit）と $\sqrt{2}$ の連分数（continued fraction）がどのように結びつくのかが説明されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。