解答例

STEP II 2011、第 6 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP II 2011、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q6

鍵となる考え方

被積分関数（integrand）$[f'(x)]^2[f(x)]^n$ は、f' の因子を一つ除けばすぐに積分できる形になる。$f'(x)[f(x)]^n$ は $[f(x)]^{n+1}/(n+1)$ の導関数だからである。そこで、その部分を切り離して部分積分（integration by parts）を行う。残った積分には f'' が含まれるが、条件 $f''=kff'$ によって再び同じ易しい形 $f'f^m$ に戻る。応用問題では、与えられた被積分関数が $[f']^2f^n$ となるように f と n を選び、k を求めればよい。

解答

一般的な結果

$f(x)$ を f と書き、他も同様に略記する。$u=f'$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'f^n$ として部分積分すると、$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f''$、$v=\dfrac{f^{n+1}}{n+1}$ である（$n\geq 1$ より $n+1\neq 0$ なので問題ない）：

$$\begin{aligned} I=\int f'\cdot f'f^n\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int f''f^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{k}{n+1}\int f'f^{n+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{次を用いた：}f''=kff' \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1}-\frac{kf^{n+3}}{(n+1)(n+3)}+C. \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{I=\frac{f'(x)\,[f(x)]^{n+1}}{n+1}-\frac{k\,[f(x)]^{n+3}}{(n+1)(n+3)}+C}$$

であり、これは求められているとおり $f(x)$、$f'(x)$、k、n で表された式である。

小問 (i)

$f(x) = \tan x$ のとき $f'(x) = \sec^2 x$ であり、

$$f''(x) = 2\sec x \cdot \sec x \tan x = 2\tan x \sec^2 x = 2f(x)f'(x),$$

となるので、$k = 2$ として条件が成り立つ。したがって公式より

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\sec^2 x \tan^{n+1} x}{n+1} - \frac{2\tan^{n+3} x}{(n+1)(n+3)} + C. \tag{1}$$

検証。 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ と置換（substitution）$t = \tan x$、$\mathrm{d}t = \sec^2 x \,\mathrm{d}x$ を用いて直接計算すると

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \int (1+t^2)t^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3} + C.$$

一方、(1) の右辺を $\sec^2 x = 1 + t^2$ を用いて書き直すと

$$\frac{(1+t^2)t^{n+1}}{n+1} - \frac{2t^{n+3}}{(n+1)(n+3)} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{(n+3)-2}{(n+1)(n+3)}\,t^{n+3} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3},$$

となり、同じ答えが得られる。よって $f = \tan$ の場合に結果が確かめられた。

積分の計算。

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} = \tan^4 x \sec^4 x = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

であるから、これは (1) の $n = 4$ の場合である。いま得た簡単な形を用いると

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

小問 (ii)

> **考えてみよう** f として何を選べばよいか。また $\sec^2 x$ はどこから来るのか。

括弧 $(\sec x + \tan x)$ が f の候補として自然なので、$f(x) = \sec x + \tan x$ としてみる。その導関数は

$$f'(x) = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x(\tan x + \sec x) = \sec x\, f(x).$$

これが鍵となる事実である。f を微分すると、単に $\sec x$ が掛かるだけなのである。したがって

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sec x \tan x\, f(x) + \sec x\, f'(x) = \sec x \tan x\, f + \sec^2 x\, f \\ &= \sec x\, f\,(\tan x + \sec x) = \sec x\, f^2, \end{aligned}$$

であり、$ff' = f \cdot \sec x f = \sec x f^2$ でもあるから $f'' = ff'$、すなわち $k = 1$ である。

また $[f'(x)]^2 = \sec^2 x\,[f(x)]^2$ であるから

$$\sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6 = \sec^2 x\, f^2 \cdot f^4 = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

となり、これは一般的な結果の $n = 4$、$k = 1$ の場合である：

$$\begin{aligned}\int \sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^5}{5} - \frac{f^7}{35} + C = \frac{\sec x\, f^6}{5} - \frac{f^7}{35} + C \\ &= \frac{f^6}{35}(7\sec x - (\sec x + \tan x)) + C \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^6\,(6\sec x - \tan x)}{35} + C.\end{aligned}$$

検算

- (i) の答えを微分すると：$\sec^2 x \tan^4 x + \sec^2 x \tan^6 x = \sec^2 x \tan^4 x(1 + \tan^2 x) = \tan^4 x \sec^4 x$。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\int_{-0.7}^{1.1} \sin^4 x / \cos^8 x\,\mathrm{d}x \approx 22.12954$ となり、$\left[\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x\right]_{-0.7}^{1.1}$ と一致する。また $\int_{-1}^{0.9} \sec^2 x(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x \approx 133.68566$ となり、(ii) の答えと一致する。
- 一般公式は、$f = \tan$ かつ n が 1 から 6 までのすべての場合に数値積分（quadrature）と一致する。

よくある間違い

- 部分積分で $u = f^n$ を選ぶこと：これでは $f^{n-1}[f']^3$ が現れ、かえって悪くなる。f' の一つを f^n と組にして、ちょうど積分できるようにする。
- $\tan x$ に対して $k = 1$ とすること：$f'' = 2\sec^2 x \tan x$ であるから $k = 2$ である。
- (ii) で、$\sec^2 x$ を $[f']^2/f^2$ として吸収しなければならないことを忘れること。指数が 6 から $n = 4$ に下がるのはこのためである。

STEP のその先へ

条件 $f'' = kff'$ はそれ自体が微分方程式（differential equation）である。一度積分すると $f' = \frac{1}{2}kf^2 + c$ という一階の変数分離形（separable）の方程式になり、その解には $\tan$（$k = 2$、$c = 1$）や $\sec x + \tan x$（$k = 1$、$c = \frac{1}{2}$）が含まれる。関数がある常微分

方程式を満たすがゆえに被積分関数が扱いやすくなる、と見抜くことは、大学一年次の特殊関数（special functions）や漸化式（reduction formulae）の学習で繰り返し現れるテーマである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、このような変数分離形の方程式や自励系（autonomous）の方程式が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。