解答例

STEP II 2011、第 5 問

純粋数学 ・ ベクトルと鏡映

> **STEP II 2011、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q5

鍵となる考え方

原点を通る直線に関して点を折り返すには、その点の位置ベクトル（position vector）を、直線に沿った成分と直線に垂直な成分とに分解すればよい。鏡映（reflection）は前者をそのまま保ち、後者の向きを反転させる。$\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}$ 方向の成分はおなじみの射影（projection）$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$ であり、あとは内積の計算を整理するだけである。共線性（collinearity）については、ある点が直線 AB 上にあるのは、その位置ベクトルが $s+t=1$ を満たす $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ の形に書けるときであり、そのときに限ることを思い出そう。

解答

以下では常に、O、A、B が同一直線上にないことから、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は零ベクトルでなく、しかも平行でない。特に $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\neq 0$ かつ $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\neq 0$ であるから、これらで割ってよい。$\theta=\angle AOB$ とおく。

鏡映点 C

B から直線 OA に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を P とする。その位置ベクトルはある実数倍 $k\mathbf{a}$ であり、$\mathbf{b}-k\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}$ に垂直であるから

$$(\mathbf{b}-k\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

直線 OA に関する鏡映は P を動かさず、B を反対側にある点 C で、P が BC の中点となるものに移す。よって $\mathbf{c}=2\overrightarrow{OP}-\mathbf{b}$、すなわち

$$\mathbf{c}=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}-\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}-\mathbf{b},\qquad \lambda=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}},$$

となり、示すべきことが得られた。

鏡映点 D

OA の代わりに直線 OB を用いて同じ議論を行うと

$$\mathbf{d} = \frac{2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\,\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

ここで $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 2\right)\mathbf{b} - (\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1\right)\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}.\end{aligned}$$

これは $\mathbf{d} = \mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$ の形であり、

$$\mu = \frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1 = \frac{4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})} - 1 = 4\cos^2\theta - 1,$$

である。最後の等号では $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ を用いた。以下で必要になるのは $4\cos^2\theta - 1$ という形である。

A、B、D が同一直線上にある場合

点 D が直線 AB 上にあるのは、ある実数 t に対して $\mathbf{d} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ となるとき、かつそのときに限る。一方で $\mathbf{d} = -\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ でもある。

? **考えてみよう** なぜ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の係数を比較してよいのだろうか？

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行でないからである。$s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = s'\mathbf{a} + t'\mathbf{b}$ ならば $(s-s')\mathbf{a} = (t'-t)\mathbf{b}$ であり、両辺の括弧がともに 0 でない限り、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行になってしまう。O、A、B が同一直線上にないという条件が使われるのはここである。

したがって $-\lambda = 1 - t$ かつ $\mu = t$ である。t を消去すると、A、B、D が同一直線上にあるのは、ちょうど

$$\mu = \lambda + 1.$$

のときである。

$\lambda = -\frac{1}{2}$ の場合

このとき共線条件より $\mu = \frac{1}{2}$ となるので、$4\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}$、すなわち $\cos^2\theta = \frac{3}{8}$ である。$\lambda < 0$ より $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$ であるから $\cos\theta < 0$ となり、

$$\cos\angle AOB = -\sqrt{\tfrac{3}{8}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

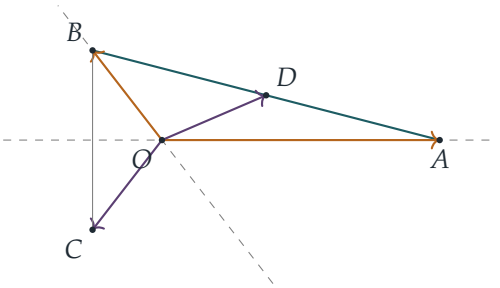
さらに

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),$$

であるから、D **は** AB **の中点である**。図形の形についてさらに詳しく述べることができる。$\lambda = \dfrac{2|\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{a}|} = -\tfrac{1}{2}$ より

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = -4\cos\theta = \sqrt{6},$$

となるので $OA = \sqrt{6}OB$ であり、角 AOB は鈍角（約 127.8°）である。また、鏡映は O からの距離を保つから $OD = OC = OB$ である。つまり、AB の中点は O からちょうど B と同じ距離にある。



検算

- まず OA に関して、次に OB に関して、と 2 回折り返すことは、O を中心とする角 2θ の回転（rotation）である。よって D は B を角 2θ だけ回転させた点であるはずで、$\cos\angle BOD = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ となる。最後の場合、これは $2\cdot\frac{3}{8} - 1 = -\frac{1}{4}$ である。直接計算すると、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{4}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ を用いて $\mathbf{b}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)|\mathbf{b}|^2 = -\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2$ となり、一致する。
- $\theta = 90°$ ならば $\lambda = 0$ であり、C は $-\mathbf{b}$、D もまた $-\mathbf{b}$ である。公式からは $\mu = 4\cdot 0 - 1 = -1$ が得られ、期待どおりである。
- 数値で確かめると、$\mathbf{a} = (\sqrt{6}, 0)$、$\mathbf{b} = (-0.6124, 0.7906)$ として 2 回折り返すと $\mathbf{d} = (0.9186, 0.3953)$ となり、これは AB の中点であって、$|\mathbf{d}| = 1 = |\mathbf{b}|$ である。

よくある間違い

- 鏡映を $\mathbf{b} - 2\times$(射影) と書いてしまう。これは OA に**垂直な**直線に関する鏡映である。動かないはずの $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ を代入して確かめるとよい。
- $\cos\theta = +\sqrt{6}/4$ としてしまう。λ の符号によって $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ の符号が決まる。

- $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が一次独立（linearly independent）であることを述べずに係数を比較してしまう。

STEP のその先へ

写像 $\mathbf{x} \mapsto \frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a} - \mathbf{x}$ は線形写像（linear map）であり、その行列は、行列式（determinant）が -1 の直交行列（orthogonal matrix）の例として大学 1 年で定番のものである。2 つの鏡映を合成すると、2 枚の鏡のなす角の 2 倍だけの回転が得られる。これは、等長変換（isometry）や、正多角形の対称性の群のような鏡映によって生成される群（group）の研究の出発点である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、射影と鏡映の行列をよく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。