解答例

STEP II 2011、第 4 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 2011、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q4

鍵となる考え方

$\cos\theta$ を関連する角の正弦(sine)(あるいは余弦(cosine))として書き直し、「$\cos\theta = \sin 4\theta$」を二つの余弦の間の方程式に変えれば、厳密に解くことができる。$\sin 4\theta$ を $\sin\theta$ のべきで展開すると、それらの角の正弦を根（root）にもつ三次方程式（cubic）が得られる。$\sin 18^\circ$ のような累乗根（surd）を含む値が現れるのはこのためである。小問 (ii) は $\sin^2 x$ についての二次方程式（quadratic）であり、小問 (iii) は、正弦の 2 乗が $\frac{1}{4}$ となる角に気づけば、姿を変えた小問 (ii) にすぎない。

解答

小問 (i)

同じ種類のもの同士を比べるために、$\sin 4\theta = \cos(90^\circ - 4\theta)$ と書く。二つの角の余弦が等しいのは、360° の倍数の差を除いて、それらが等しいか符号が逆であるときであり、かつそのときに限るから、

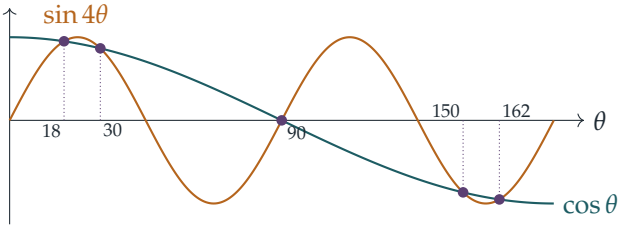
$$\cos\theta = \cos(90^\circ - 4\theta) \iff \theta = \pm(90^\circ - 4\theta) + 360^\circ k \quad \text{ある整数} k.$$

- $+$ の符号の場合：$5\theta = 90^\circ + 360^\circ k$ より $\theta = 18^\circ + 72^\circ k$ である。$0^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲では $\theta = 18^\circ, 90^\circ, 162^\circ$ となる。
- $-$ の符号の場合：$3\theta = 90^\circ - 360^\circ k$ より $\theta = 30^\circ - 120^\circ k$ であり、$\theta = 30^\circ, 150^\circ$ を得る。

したがって解は

$$\theta = 18^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 162^\circ.$$

である。下のグラフから、交点がちょうど 5 個であることが確かめられる。



次に「これを用いて」(hence) の部分に移る。$s = \sin\theta$ とおく。倍角の公式 (double-angle formulae) を 2 回用いると、

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta),$$

となるので、方程式 $\cos\theta = \sin 4\theta$ は

$$\cos\theta\big(1 - 4s(1 - 2s^2)\big) = 0.$$

となる。

考えてみよう なぜ $\cos\theta$ を約してよいのか？

5 つの解のうち、$\cos\theta = 0$ となるのは $\theta = 90°$ だけである。残りの 4 つ $18°, 30°, 150°, 162°$ はいずれも $\cos\theta \neq 0$ を満たすので、これらについては $\cos\theta$ で割ることができ、

$$8s^3 - 4s + 1 = 0.$$

を得る。$s = \sin 30° = \frac{1}{2}$ が一つの根であることはわかっているので、因数分解 (factorise) すると

$$8s^3 - 4s + 1 = (2s - 1)(4s^2 + 2s - 1).$$

となる。さて $\sin 18°$ はこの三次方程式の根であり、$0 < \sin 18° < \sin 30° = \frac{1}{2}$ である (正弦は $[0°, 90°]$ で増加するから)。よって $\sin 18° \neq \frac{1}{2}$ であり、これは $4s^2 + 2s - 1 = 0$ の根でなければならない。その根は

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

である。正となるのは $+$ の根だけなので、

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}\big(\sqrt{5} - 1\big),$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

$s = \sin x$ とおく。$\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cos^2 x = 4s^2(1-s^2)$ であるから、方程式は s のみで表される：

$$4s^2 + 1 = 16s^2(1-s^2) \iff 16s^4 - 12s^2 + 1 = 0.$$

これは s^2 についての二次方程式である：

$$s^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144-64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

平方根をとるために、次のことに注意する。

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

s^2 のどちらの値も 0 と 1 の間にあるので、4 つの平方根はどれも $\sin x$ の値として実際にとりうるものであり、上の変形はすべて同値変形であったから、いずれももとの方程式を満たす。とりうる値は

$$\sin x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}.$$

である。小問 (i) より $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \sin 18^\circ$ である。また $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \sin 54^\circ$ である（これは $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$ に等しく、計算すれば同じ値になることが確かめられる）。

小問 (iii)

小問 (ii) の方程式を 4 で割ると

$$\sin^2 x + \tfrac{1}{4} = \sin^2 2x.$$

となる。これを $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha = \sin^2 6\alpha$ と比べよう。$x = 3\alpha$ とおけば自動的に $2x = 6\alpha$ となり、

$$\sin^2 5\alpha = \tfrac{1}{4} \qquad \text{かつ} \qquad \sin 3\alpha \text{ が小問 (ii) の 4 つの値のいずれかである。}$$

ならば、二つの方程式は一致する。

考えてみよう $\sin 3\alpha$ がそれらの値のいずれかであれば十分だろうか？

十分である。小問 (ii) で見たように、方程式 $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin^2 2x$ は x を $s = \sin x$ を通してのみ含み、s のこれら 4 つの値はこの方程式を満たす。したがって、正弦がこれらの値のいずれかとなる x であれば、どれでも方程式を満たす。

$\alpha = 6°$ とする。すると $5\alpha = 30°$ なので $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ であり、$3\alpha = 18°$ なので $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ となって、これは求めた値の一つである。よって

$$\sin^2 18° + \sin^2 30° = \sin^2 36°,$$

であり、$\alpha = 6°$ は解である。

$\alpha = 42°$ とする。すると $5\alpha = 210°$ なので $\sin 5\alpha = -\frac{1}{2}$、$\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ であり、$3\alpha = 126°$ なので $\sin 3\alpha = \sin 54° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ となって、これも求めた値の一つである。したがって $\alpha = 42°$ は解である。

以上より、条件を満たす値として $\alpha = 6°$ と $\alpha = 42°$ の二つが得られる。

同じ方法で、$\alpha = 66°$（$5\alpha = 330°$、$\sin 3\alpha = \sin 198° = -\sin 18°$）と $\alpha = 78°$（$5\alpha = 390°$、$\sin 3\alpha = \sin 234° = -\sin 54°$）も得られる。範囲内で $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$ を満たすもう一つの角は $\alpha = 30°$ であるが、$\sin 90° = 1$ は求めた値のいずれでもないので、これは解にならない（実際、$1 + \frac{1}{4} \neq \sin^2 180° = 0$ である）。

検算

- $\sin 18° \approx 0.30902$ であり、$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.30902$ である。
- $\alpha = 6°$ のとき：$\sin^2 18° + \sin^2 30° \approx 0.09549 + 0.25 = 0.34549$ であり、$\sin^2 36° \approx 0.34549$ である。
- $(0°, 90°)$ 上で $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha - \sin^2 6\alpha$ を数値的に調べると、零点はちょうど $6°, 42°, 45°, 66°, 78°$ にある。余分な $45°$ は小問 (ii) からは得られない。そこでは $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ となっている。

よくある間違い

- $\cos A = \cos B$ の解のもう一つの系列（すなわち $A = -B + 360°k$）を忘れ、小問 (i) で $30°$ と $150°$ を見落とす。
- 断りなく $\cos\theta$ を約す。ここではそれで問題ないが、それは $\cos\theta = 0$ となる解が $90°$ であって $18°$ ではないからにすぎない。
- 小問 (ii) で $\sin x$ の正の値だけを答える。4 つともとりうる値である。

STEP のその先へ

$\sin 18^\circ$ の正確な値が求まるのは、18° が直角の 5 分の 1 であることによる。そのためこの値は正五角形（regular pentagon）や黄金比（golden ratio）と結びついている：$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\varphi$。より一般に、$\cos(360^\circ/n)$ が平方根だけを用いて表せるのは、正 n 角形が定規とコンパス（ruler and compasses）で作図できるときであり、かつそのときに限る。ガウス（Gauss）が示したように、これは n を割り切るフェルマー素数（Fermat primes）によって決まる。これは体論（field theory）とガロア理論（Galois theory）の古典的な最初の応用である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は必要な代数を一から積み上げており、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は、1 の冪根（roots of unity）と多角形がなぜ結びつくのかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。