解答例

STEP II 2011、第 3 問

純粋数学 • 単調性による不等式

> **STEP II 2011、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q3

鍵となる考え方

ここで扱う不等式（inequality）はすべて、ひとつの原理から導かれる。すなわち、関数が 0 から出発し、その導関数（derivative）が非負であれば、関数は非負のままである。最後の二つの結果には、さらにひとひねりが加わる。ある関数が増加（increasing）であるとわかれば、大小関係がすでにわかっている二つの入力（たとえば $x \leq \arcsin x$）を代入し、出力どうしの不等式を読み取ることができる。**どの**二つの入力を比べるかを見抜くことが、この問題の要点のすべてである。

解答

小問 (i)(a)

$x\cos x$ に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ では $x \geq 0$ かつ $\sin x \geq 0$ であるから、$f'(x) \geq 0$ となり、f はこの区間で増加である。

よって $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ に対して $x \geq 0$ であるから、$f(x) \geq f(0) = \sin 0 - 0 = 0$ となり、示すべきことが得られた。

小問 (i)(b)

$0 \leq x < 1$ に対して $h(x) = \arcsin x - x$ とおく。与えられた事実を用いると、

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

である。したがって h は増加であり、$h(x) \geq h(0) = 0$ が成り立つ。すなわち、$0 \leq x < 1$ に対して $\arcsin x \geq x$ である。

（与えられた事実とは $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ にほかならず、これは $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$ であることから成り立つ。）

小問 (i)(c)

$g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ とおく。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ に対して、商の微分法（quotient rule）により

$$g'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}.$$

(a) より、この範囲で $f(x) \geq 0$ であり、また $\sin^2 x > 0$ であるから、$g'(x) \geq 0$ となり、g は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加である。

考えてみよう g が増加であることがわかると、$\arcsin x$ を含む不等式を示すのにどう役立つだろうか。

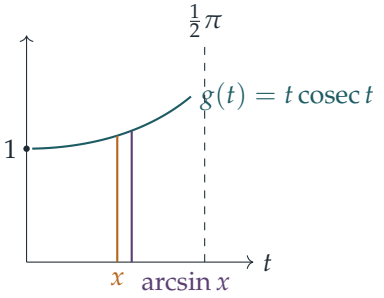
目標の式 $\dfrac{\arcsin x}{x} \geq \dfrac{x}{\sin x}$ を見てみよう。右辺は $g(x)$ である。左辺もまた g のある値になっている。$y = \arcsin x$ とおくと $\sin y = x$ であるから、

$$g(y) = \frac{y}{\sin y} = \frac{\arcsin x}{x}.$$

したがって $g(\arcsin x) \geq g(x)$ を示せばよく、これは g が増加であることから、(b) の結果 $\arcsin x \geq x$ より従う。

仕上げとして、$0 < x < 1$ をとり、$y = \arcsin x$ とおく。このとき $0 < y < \frac{1}{2}\pi$ である。また $0 < x < 1 < \frac{1}{2}\pi$ であるから、x と y はともに g が増加である区間に属する。(b) より $y \geq x$ であるから、$g(y) \geq g(x)$ となる：

$$(\arcsin x)\, x^{-1} = \frac{y}{\sin y} \geq \frac{x}{\sin x} = x \operatorname{cosec} x \qquad (0 < x < 1).$$



図は $x = 0.8$ の場合の議論を示している。入力 $\arcsin x$ は x の右側にあるので、増加する曲線はそこでより高い位置にある。

小問 (ii)

(i) の流れをそのままなぞる。まず (b) に相当する部分である。$x \geq 0$ に対して $m(x) = x - \arctan x$ とおく。与えられた事実より $m'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) \geq 0$ であるから、$m(x) \geq m(0) = 0$ となる。よって

$$\arctan x \leq x \qquad (x \geq 0).$$

次に、(c) に相当する部分である。$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ に対して $k(x) = x^{-1}\tan x$ とおく。分子と分母に $\cos^2 x$（これは正である）を掛け、さらに 2 を掛けると、

$$k'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x},$$

が得られる。

考えてみよう なぜ $2x - \sin 2x \geq 0$ なのだろうか。

これはおなじみの不等式 $t \geq 0$ に対する $\sin t \leq t$ において $t = 2x$ としたものである。これも他と同じやり方で証明できる。$p(t) = t - \sin t$ とおくと $p'(t) = 1 - \cos t \geq 0$ かつ $p(0) = 0$ であるから、$t \geq 0$ に対して $p(t) \geq 0$ である。

したがって $k'(x)$ の分子は非負、分母は正であり、$k'(x) \geq 0$ となる。よって k は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加である。

ここで $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ をとり、$y = \arctan x$ とおく。このとき $0 < y < \frac{1}{2}\pi$ であるから、x と y はともに k が増加である区間に属し、さらに $\tan y = x$ である。$y \leq x$ であるから、$k(y) \leq k(x)$ となる：

$$\frac{x}{\arctan x} = \frac{\tan y}{y} \leq \frac{\tan x}{x}.$$

x と $\arctan x$ はともに正であるから、両辺に $x\arctan x$ を掛けても不等号の向きは変わらない：

$$(\tan x)(\arctan x) \geq x^2 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi),$$

これで示すべきことが得られた。

検算

- (c) で $x = \frac{1}{2}$ とすると、$\arcsin(\frac{1}{2})/\frac{1}{2} = \pi/3 \approx 1.0472$ であり、一方 $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{2} \approx 1.0429$ である。不等式は成り立っているが、その差はわずかである。これは予想どおりであり、$x \to 0$ のとき両辺はともに 1 に近づく。

- (ii) で $x = 1$ とすると、$\tan 1 \cdot \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi \tan 1 \approx 1.2232 \geq 1$ である。
- x が小さいとき、$\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3$、$\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ であるから、積は $x^2 + O(x^6)$ となる。つまり (ii) の不等式は 0 の近くで極めてきわどい。20,000 個の無作為な点での数値計算により、上のすべての不等式と導関数の式が正しいことを確認した。

よくある間違い

- (c) で、誤った二点で g の値を比べてしまう。あるいは、$\arcsin x$ が g の増加がわかっている区間 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることの確認を忘れる。
- (ii) では入力どうしの不等式が逆向き（$\arctan x \leq x$）であるから、出力どうしの不等式も逆向きになる。ここを取り違えると、誤った不等式が得られてしまう。
- 不等式の両辺に何かを掛けるときに、掛ける数（$x \arctan x$ や $\cos^2 x$）が正であることを述べ忘れる。

STEP のその先へ

全体を通して用いた原理、すなわち導関数が非負であれば関数は増加するという事実は、平均値の定理（mean value theorem）の帰結であり、この定理は解析学（analysis）の最初の講義で必ず証明される。sin と arcsin が互いに逆関数であることを利用して $g(x)$ と $g(\arcsin x)$ を比べる技法は、逆関数（inverse function）や凸性（convexity）に関連して出会う考え方の親戚である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、平均値の定理とその帰結について、丁寧で読みやすい証明を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。