解答例

STEP II 2011、第 2 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

> **STEP II 2011、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q2

鍵となる考え方

x^3+y^3 を見たら、必ず因数分解（factorise）する：$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$。$x+y$ の値が決まれば（(i) では k、(ii) では z^2）、因数 $x+y$ が kz^3 の一部と約分され、2 次の条件が残る。その 2 次式を平方完成（completing the square）すると「何か $=3\times$ 完全平方数（perfect square）」という形になり、さらに不等式で範囲を絞ると、試すべき立方数はほんの数個しか残らない。問題が最初に 10^3 までの立方数を求めさせているのはそのためである。

参考までに：$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000$。

解答

小問 (i)

$x+y=k$ であるから、

$$kz^3=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=k(x^2-xy+y^2),$$

であり、$k>0$ より $z^3=x^2-xy+y^2$ である。$y=k-x$ を代入すると、

$$\begin{aligned} z^3 &= x^2-x(k-x)+(k-x)^2 \\ &= x^2-kx+x^2+k^2-2kx+x^2 \\ &= k^2-3kx+3x^2, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

完全平方数。4 を掛けて平方完成する：

$$4z^3 - k^2 = 12x^2 - 12kx + 3k^2 = 3(4x^2 - 4kx + k^2) = 3(k-2x)^2.$$

よって $\dfrac{4z^3 - k^2}{3} = (k-2x)^2$ であり、これは整数 $k-2x$ の平方である。

範囲の評価。上の式から $4z^3 = k^2 + 3(k-2x)^2 \geq k^2$ であるので、$\frac{1}{4}k^2 \leq z^3$ である。上からの評価については、$3kx - 3x^2 = 3x(k-x) = 3xy$ に注意すると、

$$z^3 = k^2 - 3xy < k^2,$$

となる。x と y は正だからである。したがって $\frac{1}{4}k^2 \leq z^3 < k^2$ である。

$k = 20$ の場合。$x + y = 20$ を満たす解を探す。不等式から $100 \leq z^3 < 400$ であるので、立方数の一覧より $z^3 \in \{125, 216, 343\}$ である。そこで $(4z^3 - 400)/3$ が完全平方数かどうかを調べる：

- $z = 5$：$(500 - 400)/3 = 100/3$ となり、整数でない。
- $z = 6$：$(864 - 400)/3 = 464/3$ となり、整数でない。
- $z = 7$：$(1372 - 400)/3 = 324 = 18^2$。✓

よって $k = 20$ のもとで $(k-2x)^2 = 18^2$ である。$x < y$ は $2x < x + y = k$ を意味するので $k - 2x > 0$ であり、$k - 2x = 18$ となって、$x = 1$、$y = 19$ を得る。検算：$1^3 + 19^3 = 1 + 6859 = 6860 = 20 \times 343 = 20 \times 7^3$。したがって

$$x = 1, \quad y = 19, \quad z = 7$$

は $k = 20$ のときの $(*)$ の解である。

小問 (ii)

今度は $x + y = z^2$ と仮定する。すると

$$kz^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = z^2(x^2 - xy + y^2),$$

であり、z^2 で割ると（$z > 0$ なので許される）$x^2 - xy + y^2 = kz$ を得る。

> ? **考えてみよう** ここでも同じ「完全平方数」の技法を使うにはどうすればよいか。

恒等式（identity）$4(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2 + 3(x-y)^2$ を用いる。これは (i) で見つけた式を形を変えて表したものである（右辺を展開して確かめよ）。$x + y = z^2$、$k = 19$ とすると、これは

$$76z = z^4 + 3(y-x)^2, \qquad \text{すなわち} \qquad 3(y-x)^2 = z\,(76 - z^3).$$

となる。$y > x$ より左辺は正であるので、$z^3 < 76$、したがって $z \in \{1,2,3,4\}$ である。$z(76 - z^3)/3$ が完全平方数である必要がある：

- $z = 1$：$75/3 = 25 = 5^2$ より $y - x = 5$。しかし $x + y = 1$ であり、正の整数ではありえない。
- $z = 2$：$2 \times 68/3 = 136/3$ となり、整数でない。
- $z = 3$：$3 \times 49/3 = 49 = 7^2$ より $y - x = 7$、$x + y = 9$ であり、$x = 1$、$y = 8$ を得る。
- $z = 4$：$4 \times 12/3 = 16 = 4^2$ より $y - x = 4$、$x + y = 16$ であり、$x = 6$、$y = 10$ を得る。

検算：$1^3 + 8^3 = 513 = 19 \times 27 = 19 \times 3^3$、$6^3 + 10^3 = 1216 = 19 \times 64 = 19 \times 4^3$。よって $k = 19$ のときの $(*)$ の解として、次の 2 つがある。

$$(x,y,z) = (1,8,3) \quad \text{および} \quad (x,y,z) = (6,10,4).$$

（実際、上の議論から、$x + y = z^2$ を満たす解はこれらに限ることがわかる。）

検算

- (i) の恒等式を小さな例で確かめる：$k = 5$、$x = 2$、$y = 3$ とすると $x^3 + y^3 = 35 = 5 \times 7$ であり、$k^2 - 3kx + 3x^2 = 25 - 30 + 12 = 7$。✓
- 上で行ったように、すべての答えを $(*)$ に代入して確かめる：$6860 = 20 \times 343$、$513 = 19 \times 27$、$1216 = 19 \times 64$。
- $x + y = 20$ を満たすすべての $x < y$、および $k = 19$ に対して $x + y = z^2$ を満たすすべての $x < y$ をコンピュータで探索すると、ちょうどこれらの解が見つかり、ほかには見つからない。

よくある間違い

- 符号を忘れる：$(k - 2x)^2 = 18^2$ からは $k - 2x = -18$ も考えられるが、これは $x = 19 > y$ を与え、条件 $x < y$ により除外される。
- (ii) で $z = 1$ を解として残してしまう：$y - x = 5$ 自体は問題ないが、$x + y = 1$ と両立しない。

STEP のその先へ

$x^3 + y^3 = kz^3$ のような方程式は、どの整数 k が 2 つの有理数（rational）の立方の和として表せるかを問うものであり、この問いは楕円曲線（elliptic curves）へと直結し、今なお完全には解決されていない。有名なタクシー数（taxicab number）$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ も同じ世界に属している。ここで用いた技法（因数分解し、平方完成し、範囲を評価して有限個の探索に帰着させる）は、初等整数論（elementary number theory）の基本中の基本である。次の一歩としては、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がすばらしい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。