解答例

STEP II 2011、第 12 問

確率・統計 ・ ゲームと等比級数

> **STEP II 2011、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q12

鍵となる考え方

各ゲームは高々 3 ポイントで終わるので、ゲームの進み方をすべて書き出すことができ（ポイントの列は 8 通りしかない）、それらを「Xavier の勝ち」「Younis の勝ち」「どちらも勝たず、もう 1 ゲーム行う」に分類できる。新しいゲームは毎回まっさらな状態から始まるので、試合全体は幾何的な過程となる。すなわち、Younis が試合に勝つ確率（probability）は、Younis が 1 ゲームに勝つ確率を、1 ゲームで決着がつく確率で割ったものである。

解答

各ゲームを、各ポイントを取った選手の列で表す。たとえば XYY は、第 1 ポイントを Xavier が取り、第 2・第 3 ポイントを Younis が取ったことを意味する。第 1 ポイントは確率 p で X が取る。それ以降の各ポイントは、確率 p で直前のポイントと**同じ選手**が取り、確率 $1-p$ で**入れ替わる**。

同じ選手が 2 ポイント連続で取った時点でゲームの決着がつくので、起こりうるゲームは次のとおりである。

列	確率	結果
XX	$p \cdot p$	Xavier の勝ち
YXX	$(1-p)(1-p)p$	Xavier の勝ち
YY	$(1-p)p$	Younis の勝ち
XYY	$p(1-p)p$	Younis の勝ち
XYX	$p(1-p)(1-p)$	もう 1 ゲーム
YXY	$(1-p)(1-p)(1-p)$	もう 1 ゲーム

（ゲームが XX または YY に達したら第 3 ポイントは必要なく、それが行われたと想像しても結果に違いはない。）決着がつかないゲームは、ちょうどポイントが交互に取られるもの、すなわち後の 2 ポイントがともに「入れ替わる」ものである。

小問 (i)

あるゲームで Younis が勝つ事象を A、そのゲームで決着がつかない事象を C とする。表より

$$\mathrm{P}(A) = (1-p)p + p^2(1-p) = p(1-p)(1+p) = p(1-p^2),$$
$$\mathrm{P}(C) = p(1-p)^2 + (1-p)^3 = (1-p)^2(p+(1-p)) = (1-p)^2.$$

各ゲームは同じルールのもとで独立に行われるので、Younis が試合に勝つのは、ある $n \geq 1$ について、最初の $n-1$ ゲームで決着がつかず、第 n ゲームで Younis が勝つときである。したがって

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(C)^{n-1}\,\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(C)},$$

ここで $p \neq 0$ のとき $\mathrm{P}(C) = (1-p)^2 < 1$ であるから、この等比級数（geometric series）は収束（converge）する。（同値な見方として、第 1 ゲームで決着がつかなければ出発点に戻るので、$w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)\,w$ が成り立つ。）さて、$1-(1-p)^2 = 2p-p^2 = p(2-p)$ であるから

$$w = \frac{p(1-p^2)}{p(2-p)} = \frac{1-p^2}{2-p},$$

ここで p の約分には $p \neq 0$ を用いた。これが求める結果である。

$\frac{1}{2}$ との比較。

$$w - \tfrac{1}{2} = \frac{2(1-p^2)-(2-p)}{2(2-p)} = \frac{p-2p^2}{2(2-p)} = \frac{p(1-2p)}{2(2-p)}.$$

$0 < p \leq 1$ では因数 p と $2-p$ は正であるから、$w - \frac{1}{2}$ の符号は $1-2p$ の符号と一致する。よって $0 < p < \frac{1}{2}$ のとき $w > \frac{1}{2}$、$p > \frac{1}{2}$ のとき $w < \frac{1}{2}$ である（そして対称性から当然のとおり、$p = \frac{1}{2}$ のとき $w = \frac{1}{2}$ である）。

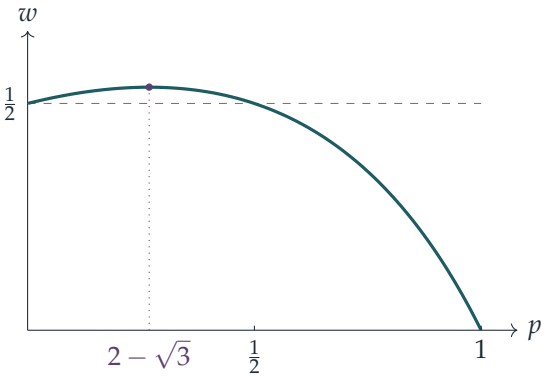
? **考えてみよう** p を小さくすると、Younis が第 1 ポイントを取りやすくなる。これは常に Younis に有利にはたらくのだろうか？

w は p について減少するか？そうではない。商の微分法（quotient rule）で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{-2p(2-p)+(1-p^2)}{(2-p)^2} = \frac{p^2-4p+1}{(2-p)^2}.$$

分子の根は $p = 2 \pm \sqrt{3}$ であり、$[0,1]$ に含まれるのは $2 - \sqrt{3} \approx 0.268$ のみである。よって $0 < p < 2 - \sqrt{3}$ では $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p > 0$、$2 - \sqrt{3} < p \leq 1$ では $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p < 0$ である。区間 $0 < p < 2 - \sqrt{3}$ では、p を小さくすると実際には w が**小さくなる**。たとえば $w(0.2) = \frac{8}{15} \approx 0.533$ であるが、$w(0.1) = \frac{99}{190} \approx 0.521$ である。

その理由は、p が二つの役割を担っていることにある。p が小さいと Younis が第 1 ポイントを取りやすくなるが、同時に連勝も起こりにくくなる。あるポイントを取った選手が次も取る確率は p にすぎないからである。p がごく小さいとポイントは交互に取られる傾向があり、第 1 ポイントの有利さは打ち消されてしまう。最大値は $w(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.536$ であり、$p \to 0$ のとき $w \to \frac{1}{2}$ となる。



小問 (ii)

$p = \frac{2}{3}$ のとき

$$w = \frac{1 - \frac{4}{9}}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{5/9}{4/3} = \frac{5}{12}.$$

$\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9} < 1$ であるから試合は確率 1 で終わり、したがって Xavier が試合に勝つ確率は $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ である。Xavier の利得の期待値（expected value）は

$$\tfrac{7}{12} \times 1 - \tfrac{5}{12} \times k,$$

であり、これが 0 のとき、すなわち

$$k = \frac{7}{5}.$$

のとき、ゲームは公平である。よって Younis が勝ったとき、Xavier は Younis に £1.40 を支払うべきである。

小問 (iii)

$p = 0$ のとき、どのゲームでも第 1 ポイントは確実に Younis が取り、それ以降の各ポイントは直前のポイントを**失った**選手が確実に取る。よってどのゲームも確率 1 で

YXY となる。誰も 2 ポイント連続で取ることはなく、試合は決して終わらない。すなわち、どちらの選手も勝たない。

小問 (i) で $p = 0$ が除かれているのはこのためである。このとき $\mathrm{P}(A) = 0$ かつ $1 - \mathrm{P}(C) = 0$ となり、公式 $w = \mathrm{P}(A)/(1 - \mathrm{P}(C))$ は $0/0$ となってしまう。$p \to 0$ のとき $\frac{1-p^2}{2-p} \to \frac{1}{2}$ となる事実は、最終的には終わる近くの試合について述べたものであり、$p = 0$ の場合そのものの確率ではない。

検算

- $p = \frac{1}{2}$ のとき、各ポイントは公平な硬貨投げであるから、w は $\frac{1}{2}$ になるはずである。公式は $\frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$ を与える。
- $p = 1$ のとき、Xavier が最初の 2 ポイントを確実に取るので $w = 0$ である。公式は 0 を与える。
- 表の 6 通りのゲームの確率の和は 1 である。
- 8 通りのポイント列すべてを厳密に数え上げると（p を 0.01 から 0.99 まで変えて）w が再現された。また、$p = \frac{2}{3}$ で 200 000 回の試合をシミュレーションしたところ、Younis が勝った割合は 41.6% であり、$\frac{5}{12} \approx 41.7\%$ とよく一致した。

よくある間違い

- 推移の規則を逆に取り違える。確率 p は Xavier ではなく、**直前のポイントを取った選手**に属する。
- 誤った積どうしを等置して $k = \frac{5}{7}$ と答える。公平であるとは $\mathrm{P}(\text{X が勝つ}) \times 1 = \mathrm{P}(\text{Y が勝つ}) \times k$ ということであり、勝つ可能性の低い側がより大きな支払いを受ける。
- 小問 (iii) で公式に $p = 0$ を代入し、各選手の勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であると答える。実際には試合は決して終わらない。

STEP のその先へ

ここでのポイントの列は**マルコフ連鎖**（Markov chain）をなす。すなわち、各ポイントは直前のポイントのみに依存する。試合を同一で独立なゲームに分割することは**再生**（renewal）論法の一例であり、方程式 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)w$ は「第一歩解析」（first-step analysis）の最も簡単な例である。これはマルコフ連鎖における吸収確率（absorption

probability）を求める標準的な方法である。小問 (iii) は吸収が起こらない場合に何が起こるかを示している。すなわち、連鎖は永遠に巡回し続ける。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ連鎖とこれらの手法を大学 1 年生のレベルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。