解答例

STEP II 2011、第 11 問

力学 ・ 三次元でのつり合い

> **STEP II 2011、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q11

鍵となる考え方

すべては、各糸に沿った単位ベクトル（unit vector）を書き下すことにかかっている。各単位ベクトルは鉛直部分と水平部分に分かれる。鉛直部分は糸が鉛直方向となす角で決まり、水平部分は O から天井にある糸の端点へ向かう向きをもち、その向きが OA となす角で決まる。3 つの単位ベクトルがわかれば、釣り合い（equilibrium）の条件は $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ のそれぞれについての 3 つのスカラー方程式にすぎない。

解答

P を質点（particle）とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとする。したがって各糸は、糸に沿った力で P をその固定端の方へ引く。O を原点とし、$\mathbf{j}$ を OA の向きに、$\mathbf{k}$ を鉛直上向きにとる。$\mathbf{i}$ は水平で OA に垂直である。

まず三角比を求める。$\tan\theta = \sqrt{2}$ であるから、辺の長さが $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ の直角三角形より

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\tan\phi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ であるから、2 辺は $4, \sqrt{2}$、斜辺は $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ となり、

$$\sin\phi = \frac{1}{3}, \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

小問 (i)

鉛直方向と角 α をなす糸の（P から天井へ向かう）単位ベクトルは、鉛直成分が $\cos\alpha$、水平部分の長さが $\sin\alpha$ である。

PB については $\alpha = 90^\circ - \theta$ であるから、鉛直成分は $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$、水平

部分の長さは $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

水平部分は OB の向きを向き（O は P の真上にあるため）、これは $\mathbf{j}$ と角 $90^\circ + \theta$ をなす。$\mathbf{j}$ と角 $90^\circ + \theta$ をなす水平な単位ベクトルは $\pm\sin(90^\circ + \theta)\,\mathbf{i} + \cos(90^\circ + \theta)\,\mathbf{j} = \pm\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}$ である。$\mathbf{i}$ の向きは、B が負の $\mathbf{i}$ 側、つまり OA に関して負の側にあるように選ぶ。求める形からこの選び方が定まる。すると PB の向きの単位ベクトルの水平部分は

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j}\right) = -\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}.$$

となる。鉛直成分を加えると、PB の向きの単位ベクトルは

$$-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},$$

となり、題意が示された。（確認：$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = 1$。）

小問 (ii)

同じ手順で残りの 2 本の糸も求まる。

糸 PA：鉛直方向との角は 30°、水平部分は $\mathbf{j}$ の向き：

$$\mathbf{e}_A = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}.$$

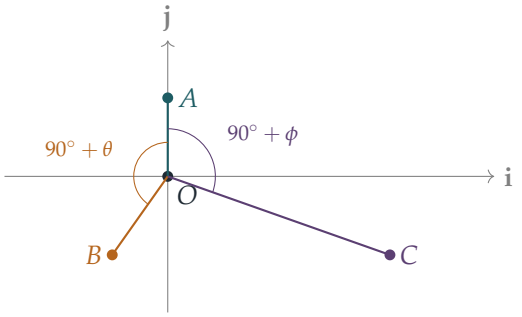
糸 PC：鉛直方向との角は 60° であるから、鉛直成分は $\frac{1}{2}$、水平部分の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。向き OC は $\mathbf{j}$ と角 $90^\circ + \phi$ をなすので、その水平な単位ベクトルは $\pm\cos\phi\,\mathbf{i} - \sin\phi\,\mathbf{j}$ である。

> **考えてみよう** C は OA に関して B と同じ側にあるか、それとも反対側にあるか？

図では反対側に描かれているが、いずれにせよ釣り合いの条件からそうでなければならない。PA の張力（tension）は $\mathbf{i}$ 成分をもたず、PB の張力のその成分は負である。もし PC も負の $\mathbf{i}$ 成分をもてば、それらを打ち消すものがない。したがって符号は $+$ であり、

$$\mathbf{e}_C = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{j}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k} = \tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

下の天井の平面図（$OP = 1$ とし、したがって $OA = \tan 30^\circ$、$OB = \cot\theta$、$OC = \tan 60^\circ$）は配置を示している。



したがって P にはたらく力は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \text{張力}PA: &\quad T\left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{張力}PB: &\quad U\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{張力}PC: &\quad V\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{重力}: &\quad -W\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

小問 (iii)

P は釣り合っているので、4 つの力の和は零である。成分ごとに考える。

i：

$$-\tfrac{1}{3}U+\tfrac{\sqrt{6}}{3}V=0 \quad\Longrightarrow\quad U=\sqrt{6}\,V,$$

となり、題意が示された。

j：

$$\tfrac{1}{2}T-\tfrac{\sqrt{2}}{3}U-\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=0.$$

$U=\sqrt{6}V$ を代入し、$\sqrt{2}\sqrt{6}=2\sqrt{3}$ を用いると、

$$\tfrac{1}{2}T=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=\tfrac{5\sqrt{3}}{6}V \quad\Longrightarrow\quad T=\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V.$$

k：

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}T+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}U+\tfrac{1}{2}V=W.$$

両方の結果を代入すると、

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}V+\tfrac{1}{2}V=\tfrac{5}{2}V+2V+\tfrac{1}{2}V=5V=W.$$

よって

$$V=\frac{W}{5},\qquad U=\frac{\sqrt{6}\,W}{5},\qquad T=\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{W}{5}=\frac{W}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,W}{3}.$$

3 つとも正であるから、どの糸もぴんと張っており、モデルと矛盾しない。

検算

- 各単位ベクトルの長さは 1 である。$\mathbf{e}_C$ については $\frac{6}{9} + \frac{3}{36} + \frac{1}{4} = 1$。
- $\mathbf{e}_A$ と $\mathbf{e}_C$ の水平部分のなす角の余弦は $-\frac{1}{3} = -\sin\phi$ であるから、その角は $90^\circ + \phi \approx 109.47^\circ$ であり、あるべき値と一致する。
- $W = 1$ とすると $T \approx 0.5774$、$U \approx 0.4899$、$V = 0.2$ である。このとき鉛直成分 $0.5774 \times 0.8660 + 0.4899 \times 0.8165 + 0.2 \times 0.5 = 0.5 + 0.4 + 0.1 = 1$ が重力と釣り合う。分担がきれいであることに注目しよう。PA、PB、PC はそれぞれ重さの $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{10}$ を支えている。

よくある間違い

- 糸 PB について sin と cos を取り違える。この糸が鉛直方向となす角は $90^\circ - \theta$ であるから、鉛直成分は $\sin\theta$ であって $\cos\theta$ ではない。
- C を OA に関して B と同じ側に置いてしまう。すると $\mathbf{i}$ 方向の式から張力が負（すなわち $V = -\frac{1}{3}W$）となってしまうが、糸の張力が負になることはありえない。
- $\cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$ であることを忘れ、$\mathbf{e}_B$ と $\mathbf{e}_C$ の $\mathbf{j}$ 成分の符号を誤る。

STEP のその先へ

互いに独立な 3 つの方向に張られた 3 本の糸があると、系は**静定**（statically determinate）となる。すなわち、釣り合いの式は一意的な解をもつ 3×3 の連立一次方程式となる。4 本目の糸を加えると、張力は静力学だけでは定まらなくなり、技術者は糸の弾性を考慮に入れなければならない。これが構造解析（structural analysis）の出発点であり、また階数（rank）と零空間（null space）に関する線形代数の出発点でもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）はこのように力をベクトルとして扱っており、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このような連立方程式がいつ一意的な解をもつかを説明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。