解答例

STEP II 2011、第 10 問

力学 ・ 放物運動と力積

> **STEP II 2011、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q10

鍵となる考え方

R は常に P の真下にあるので、2 つの粒子は運動の間ずっと同じ水平速度をもつ。したがって糸は鉛直であり、鉛直方向の運動だけを考えればよい。糸がぴんと張るのは P が平面からちょうど $\frac{1}{2}H$ の高さにあるときである。そのときの衝撃（jerk）は、P の上向きの運動量（momentum）を R と分け合う鉛直方向の撃力（impulse）である。その後 2 つの粒子は同じ速度をもつので、R が着地するまで一体の放物体（projectile）として一緒に飛ぶ。

解答

最高点の高さ

粒子を重力のみを受ける質点としてモデル化する。速度の鉛直成分は $u\sin\theta - gt$ であり、これは最高点でゼロとなる。鉛直方向に $v^2 = u^2 + 2as$ を、最終的な鉛直方向の速さを 0 として用いると、

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH \qquad \Longrightarrow \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

後のために、これから $u\sin\theta = \sqrt{2gH}$ が得られることに注意しておく。

糸がぴんと張る時刻

O を原点とし、x 軸を水平方向、y 軸を鉛直上向きにとる。粒子 P は常に水平速度 $u\cos\theta$ をもつ。R が P の真下にあり続けるためには、速さ $u\cos\theta$ で打ち出されなければならない。平面はなめらか（smooth）なので、R はその後この一定の速さで滑る。

したがって糸は常に鉛直であり、距離 PR は単に P の高さに等しい：

$$y_P = u\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gH}\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

糸がぴんと張るのは y_P が初めて $\frac{1}{2}H$ に達するときである（P は $H > \frac{1}{2}H$ まで上昇するので、実際に達する）：

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - \sqrt{2gH}\, t + \tfrac{1}{2}H = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH - gH}}{g} = (\sqrt{2}\pm 1)\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

小さい方の解が最初の時刻であるから、糸がぴんと張るのは

$$t_1 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{H/g},$$

が経過したときであり、題意が示された。（大きい方の解は、P が下降して再び高さ $\frac{1}{2}H$ を通過する時刻である。）

糸が張る瞬間の衝撃

時刻 t_1 における P の鉛直方向の速度は

$$u\sin\theta - gt_1 = \sqrt{2gH} - (\sqrt{2}-1)\sqrt{gH} = \sqrt{gH},$$

で上向きであり、一方 R の鉛直方向の速度はゼロである。どちらも水平速度 $u\cos\theta$ をもつ。

> **考えてみよう** 糸が急に張る瞬間にはたらく撃力はどれか。また、それはどの向きか。

糸は鉛直なので、張力（tension）による撃力 J も鉛直であり、P には下向きに、R には上向きにはたらく。平面はなめらかで、R を上向きに押すことしかできない。R は平面から上向きに引き離されるので、平面は撃力を及ぼさない。よって水平方向の速度は変わらず、鉛直方向には 2 粒子全体の運動量が保存される。糸は伸びない（inextensible）ので張ったままであり、直後には P と R は同じ鉛直方向の速度 w をもつ。質量はともに m で等しいので、

$$m\sqrt{gH} + m\cdot 0 = 2mw \qquad\Longrightarrow\qquad w = \tfrac{1}{2}\sqrt{gH}.$$

距離 D

衝撃の後、張力がゼロであれば P と R は同じ速度と同じ下向きの加速度 g をもつ。よって両者は一定の距離 $\frac{1}{2}H$ を隔てた 2 つの同一の放物体として運動する。このとき糸は張力ゼロのままちょうど張った状態を保つので、矛盾はない。R は高さ 0 から上向

きの速度 w で出発するので、平面に戻るまでの時間は

$$t_2 = \frac{2w}{g} = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

したがって R の運動の全時間は

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{u^2\sin^2\theta}{g^2}} = \frac{u\sin\theta}{g},$$

であり、その間ずっと R は水平方向に $u\cos\theta$ で動く。よって

$$D = u\cos\theta \cdot \frac{u\sin\theta}{g} = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}.$$

これは P 単独での水平到達距離（range）のちょうど半分である。R が着地するのは、糸がなければ P が軌道の最高点に達していたはずの瞬間である。

$D = H$ の場合

等式

$$\frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

をおき、$u^2\sin\theta/g$ で割ると（粒子が上昇するためには $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ なので、これはゼロでない）、$\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$ を得る。よって

$$\tan\theta = 2.$$

検算

- t についての 2 つの解の積は H/g、和は $2\sqrt{2H/g}$ であり、この和は P が最高点に達して平面に戻るまでの時間である。対称性から当然そうなるべきである。
- 乱数で選んだ u と θ に対する数値シミュレーション（P の飛行を $\frac{1}{2}H$ の高さに達するまで時間刻みで計算し、衝撃を適用し、さらに R が着地するまで再び時間刻みで計算する）の結果は t_1 および D と一致した。例えば $u = 18.11$、$\theta = 0.711$、$g = 9.8$ のとき、どちらの方法でも $D \approx 16.543$ となる。
- $\tan\theta = 2$、$u = 10$、$g = 9.8$ のとき：$D = H \approx 4.082$。

よくある間違い

- 大きい方の解 $(\sqrt{2}+1)\sqrt{H/g}$ を採用してしまう。これは P が下降して再び高さ $\frac{1}{2}H$ を通過する時刻である。

- 衝撃の前に R が滑っている時間 t_1 を忘れ、衝撃後の飛行だけから D を計算してしまう。
- 衝撃の瞬間にエネルギー保存則を用いてしまう。伸びない糸が急に張るとき運動エネルギーは失われる。保存されるのは運動量だけである。

STEP のその先へ

衝撃の後、2 粒子の組はその重心（centre of mass）にある 1 つの粒子とまったく同じようにふるまう。内力（ここでは張力）は系の重心の運動を決して変えない。これは大学 1 年次の講義で学ぶ質点系と剛体（rigid body）の力学の出発点であり、そこではこのような撃力的な拘束も同じ方法で扱われる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。