解答例

STEP II 2011、第 1 問

純粋数学 ・ 平方根を含む方程式

> **STEP II 2011、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q1

鍵となる考え方

どちらの小問も平方根の和を扱っており、定義域（domain）、端点での値、対称性（symmetry）を押さえれば、そのグラフは容易に理解できる。小問 (i) では、グラフから不等式（inequality）が得られる。曲線はある高さより下には決して下がらず、直線がその高さに達するのは一点のみであるから、実質的に解くべきものは何もない。小問 (ii) では、グラフから解がいくつあるべきかがわかり、それによって両辺を 2 乗したときに紛れ込む余分な解を捨てることができる。

解答

小問 (i)

$f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3+x}$ とおく。2 つの平方根がともに実数となるのは $1-x \geq 0$ かつ $3+x \geq 0$ のときに限るので、定義域は $-3 \leq x \leq 1$ である。両端では $f(-3) = 2+0 = 2$、$f(1) = 0+2 = 2$ である。

$x = -1+t$ とおくと $f = \sqrt{2-t} + \sqrt{2+t}$ となり、これは t を $-t$ に置き換えても変わらないので、曲線は $x = -1$ に関して対称である。微分すると

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{3+x}},$$

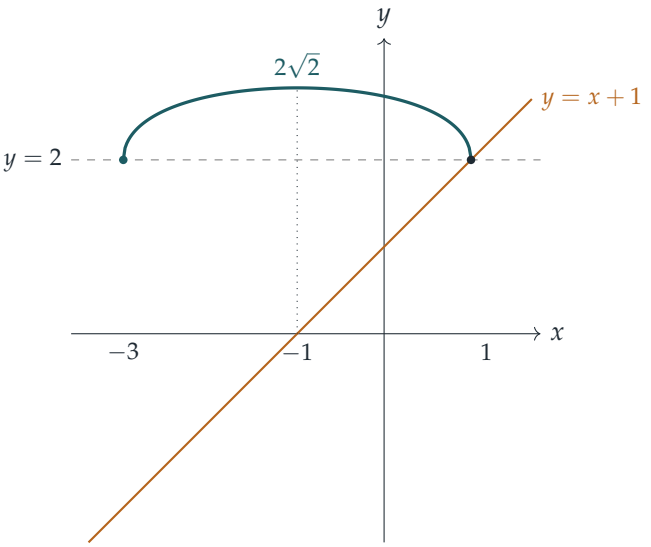
となり、これが 0 になるのは $1-x = 3+x$ のとき、すなわち $x = -1$ のときに限る。このとき $f(-1) = 2\sqrt{2}$ である。$x < -1$ では $3+x < 1-x$ なので $f'(x) > 0$ であり、$x > -1$ では $f'(x) < 0$ である。よって f は 2 から最大値 $2\sqrt{2}$ まで増加し、再び 2 まで減少する。$x = -3$ の近くでは f' の第 2 項が発散するので、曲線は $(-3, 2)$ から垂直に

立ち上がり、同様に $(1,2)$ には垂直に到達する。f の各項は凹（concave）であるから、曲線全体はなめらかな山形となる。

最小値をよりすっきりと見るには、2 乗すればよい：

$$f(x)^2 = (1-x)+(3+x)+2\sqrt{(1-x)(3+x)} = 4+2\sqrt{(1-x)(3+x)} \geq 4,$$

したがって定義域全体で $f(x) \geq 2$ であり、等号が成り立つのは $x=-3$ と $x=1$ のときに限る。



ここで直線 $y=x+1$ を考える。定義域では $x \leq 1$ なので $x+1 \leq 2$ であり、等号は $x=1$ のときに限る。一方で $f(x) \geq 2$ である。よって $f(x)=x+1$ が成り立つには両辺がともに 2 に等しくなければならず、それは $x=1$ のときに限る。確かめると $\sqrt{0}+\sqrt{4}=2=1+1$ である。したがって、方程式を満たす実数はちょうど 1 つであり、

$$x = 1.$$

である。（$[-3,1]$ の外では左辺が定義されないので、ほかに候補はない。）

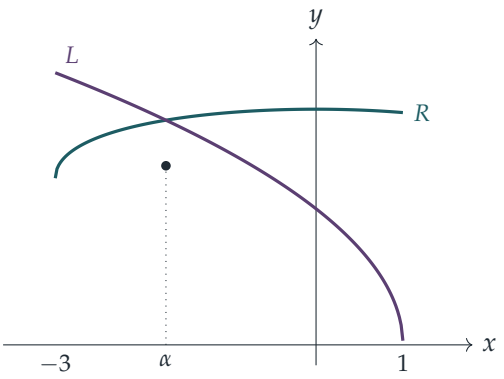
小問 (ii)

ここでも $x \leq 1$、$x \geq -3$、$x \leq 3$ が必要なので、定義域は $[-3,1]$ である。

$$L(x) = 2\sqrt{1-x} \qquad と \qquad R(x) = \sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}.$$

を比較する。L は狭義単調減少で、$L(-3)=4$ から $L(1)=0$ まで減少する。R は小問 (i) の曲線と同じ形をしている。すなわち $x=0$ に関して対称であり（x と $-x$ を入れ

替えればわかる)、$R(\pm 3)=\sqrt{6}$、最大値は $R(0)=2\sqrt{3}$ で、$[-3,0]$ で増加し $[0,3]$ で減少する。今の定義域では $x=-3$ から $x=1$ までの部分だけを見ることになり、そこでは $R(1)=2+\sqrt{2}$ である。



$x=-3$ では $L=4>\sqrt{6}=R$ であり、$x=0$ では $L=2<2\sqrt{3}=R$ である。$[-3,0]$ では L は狭義単調減少、R は増加なので、$L-R$ は狭義単調減少であり、符号はちょうど 1 回だけ変わる。$[0,1]$ では $L\leq 2$ である一方 $R\geq 2+\sqrt{2}$ なので、交わることはない。よって実数解は**ちょうど 1 つ**であり、それは $-3<x<0$ にある。

解を求めるために 2 乗する。両辺は非負なので、2 乗しても何も失われない：

$$\begin{aligned} & 4(1-x)=(3+x)+(3-x)+2\sqrt{9-x^2} \\ \iff\quad & -1-2x=\sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

考えてみよう もう一度 2 乗したとき、新しい方程式の解のうち本当の解はどれか。

右辺は平方根なので ≥ 0 である。したがって本当の解であるためには $-1-2x\geq 0$、すなわち $x\leq -\frac{1}{2}$ でなければならない。この条件のもとでは、2 乗する操作は可逆である：

$$1+4x+4x^2=9-x^2 \iff 5x^2+4x-8=0 \iff x=\frac{-2\pm 2\sqrt{11}}{5}.$$

解 $\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}\approx 0.93$ は $x\leq -\frac{1}{2}$ を満たさないので、これを捨てる。もう一方の解 $\frac{-2-2\sqrt{11}}{5}\approx -1.73$ はこの条件を満たし、グラフから予想された通り $[-3,0]$ にある。よって唯一の解は

$$x=-\frac{2+2\sqrt{11}}{5}.$$

である。

検算

- $x \approx -1.72665$ では $2\sqrt{1-x} \approx 3.3025$ であり、$\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x} \approx 1.1284+2.1741 \approx 3.3025$ である。両辺は一致する。
- 捨てた解 $x \approx 0.92665$ では $L \approx 0.542$ であるが $R \approx 3.42$ である。これは実際には $\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}=2\sqrt{1-x}$ の解であり、この式も 2 乗すると同じ式になる。
- 小問 (i) では $f(-1)=2\sqrt{2} \approx 2.83 > 0 = (-1)+1$ であり、直線が $(1,2)$ 以外のすべての点で曲線の下にあることと整合している。

よくある間違い

- 小問 (i) で 2 乗して代数的に解こうとすること。これは煩雑で、余分な解（spurious roots）が紛れ込むおそれもあるが、評価 $f \geq 2 \geq x+1$ を使えば即座に決着がつく。
- $5x^2+4x-8=0$ の 2 つの解を両方とも残してしまうこと。2 乗する操作のたびに符号の条件が必要であり、ここではそれが $-1-2x \geq 0$ である。
- 定義域を忘れること。どちらの方程式も $x>1$ では意味をもたない。

STEP のその先へ

小問 (i) は、解析学でよく使われる手法の小さな例である。すなわち、$f(x)=g(x)$ を直接解く代わりに $f \geq c \geq g$ を示し、等号がいつ成り立つかを調べるのである。小問 (ii) では、中間値の定理（intermediate value theorem）と単調性（monotonicity）を組み合わせて、解を実際に求める前にその個数を数えている。これは、大学初年級の解析学の講義で存在と一意性（existence and uniqueness）を証明するときのやり方そのものである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、連続性と中間値の定理を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。