解答例

STEP I 2011、第 9 問

力学 ・ 放物運動

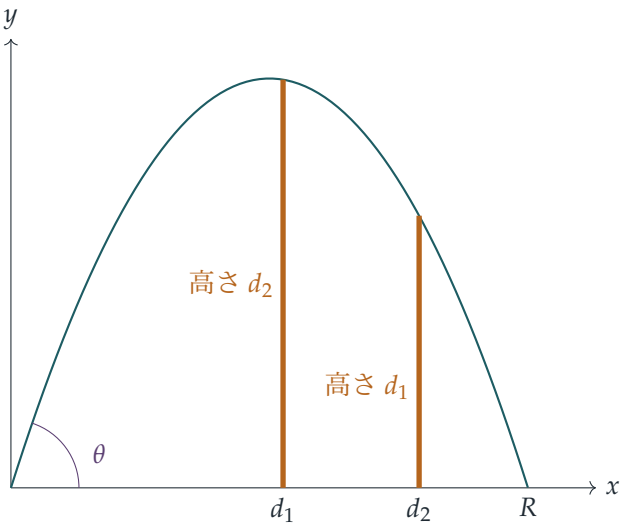
> **STEP I 2011、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q9

鍵となる考え方

軌道（trajectory）を一つの式 $y = x\tan\theta - ax^2$ で表す。ここで定数 a は g、速さ、角度をひとまとめにしたものである。壁を「ぎりぎりで越える」とは、経路が壁の上端の角を通るということである。したがって各壁から、二つの未知数 $\tan\theta$ と a についての一次方程式が一つずつ得られる。この連立方程式を解けば角度が求まり、水平到達距離（range）は $y = 0$ のもう一つの解にすぎない。

解答

粒子を、重力のみを受けて運動する（空気抵抗（air resistance）はない）質点とみなし、原点 O から速さ u、角度 θ で投射されるとする。x は水平方向、y は鉛直上向きとする。二つの壁の高さは異なるので、$d_1 \neq d_2$ と仮定する。



（図では $d_1 < d_2$ としているが、計算はどちらが大きいかには依存しない。）

軌道

時刻 t において $x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ である。$t = x/(u\cos\theta)$ を代入して t を消去すると、

$$y = x\tan\theta - ax^2, \qquad \text{ただし} a = \frac{g}{2u^2\cos^2\theta} > 0.$$

$T = \tan\theta$ とおく。粒子は各壁をぎりぎりで越えるので、壁の上端 (d_1, d_2) と (d_2, d_1) を通る：

$$d_2 = d_1 T - a d_1^2, \tag{1}$$
$$d_1 = d_2 T - a d_2^2. \tag{2}$$

$\tan\theta$ を求める

a を消去するために、(1) に d_2^2 を、(2) に d_1^2 を掛けて、a を含む項をどちらも $ad_1^2 d_2^2$ にそろえる：

$$d_2^3 = d_1 d_2^2\, T - a d_1^2 d_2^2,$$
$$d_1^3 = d_1^2 d_2\, T - a d_1^2 d_2^2.$$

辺々引くと、

$$d_2^3 - d_1^3 = d_1 d_2 (d_2 - d_1)\, T.$$

? **考えてみよう** $d_2 - d_1$ で割ってよいだろうか？

よい。二つの壁の高さ d_2 と d_1 は異なるので、$d_1 \neq d_2$ である。（もし等しければ壁は一つしかないことになり、一点だけでは θ と u の両方を決めることはできない。）$d_2^3 - d_1^3 = (d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)$ であるから、$d_1 d_2 (d_2 - d_1)$ で割ると

$$\tan\theta = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2},$$

となり、示すべき式が得られた。

水平到達距離

粒子が着地するのは $x \neq 0$ かつ $y = 0$ となる点、すなわち $x = T/a$ である。したがって a も必要である。(1) を d_1 で、(2) を d_2 で割ると、

$$\frac{d_2}{d_1} = T - a d_1, \qquad \frac{d_1}{d_2} = T - a d_2.$$

第 2 式から第 1 式を引くと T が消える：

$$a(d_2 - d_1) = \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{(d_2 - d_1)(d_2 + d_1)}{d_1 d_2}, \qquad \text{よって} \qquad a = \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2},$$

ここでも $d_1 \neq d_2$ を用いた。したがって水平到達距離は

$$R = \frac{T}{a} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2} \cdot \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 + d_2}.$$

妥当性の確認として、$R - d_2 = \dfrac{d_1^2}{d_1 + d_2} > 0$、同様に $R - d_1 = \dfrac{d_2^2}{d_1 + d_2} > 0$ であるから、粒子は当然そうあるべきとおり、両方の壁よりも先に着地する。

考えてみよう g と u はどこへ行ったのだろうか？

これらは常に一つの組み合わせ a を通してしか現れず、二つの壁によって a は完全に決まる：$u^2 = g/(2a\cos^2\theta)$。つまり壁によって軌道全体が決まり、水平到達距離は d_1 と d_2 だけに依存する。

検算

- 対称性（symmetry）：d_1 と d_2 を入れ替えることは壁を入れ替えることにすぎず、実際どちらの答えも d_1, d_2 について対称である。
- 数値：$d_1 = 2$、$d_2 = 3$ とすると、$\tan\theta = \frac{19}{6}$、$a = \frac{5}{6}$、$R = \frac{19}{5}$ を得る。このとき $y(2) = \frac{19}{3} - \frac{10}{3} = 3$、$y(3) = \frac{19}{2} - \frac{15}{2} = 2$ となり、条件を満たす。$g = 9.8$ として運動を数値的に追っても、着地点は $x = 3.8$ となる。

- $d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1d_2$ より $\tan\theta \geq 3$ であるから、投射は常に急角度である（少なくとも約 71.6°）。これは理にかなっている。まず高いほうの壁を越え、そのすぐ後に低いほうの壁の高さまで下りてくるためには、経路は幅の狭いアーチでなければならない。

よくある間違い

- どの壁がどの高さかを取り違える：距離 d_1 にある壁の高さは d_2 である。
- a を $\cos^2\theta$ ではなく $\cos\theta$ で書いてしまう、あるいは a を一つの未知数として扱わず、u と θ についての煩雑な連立方程式が残ってしまう。
- $d_2 - d_1$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

ここでの工夫は、二つの自由なパラメータ（ここでは $\tan\theta$ と a）をもつ曲線族が、通過すべき二点によって決定されるという点にある。これは補間（interpolation）の小さな例である。未知数のうまい組み合わせを選ぶという同じ考え方は、力学のいたるところに現れる。たとえば、投射速度を一定にしたときのすべての軌道の「包絡線」（envelope）（安全放物線（parabola of safety））を求める問題がそうである。大学 1 年レベルの放物運動や質点の力学をさらに学びたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。