解答例

# STEP I 2011、第 8 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

> **STEP I 2011、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q8

## 鍵となる考え方

3 乗する関数は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、$m^3$ を $n^3$ や $(n+1)^3$ と比べることは、$m$ を $n$ や $n+1$ と比べることと同じである。$m$ が連続する 2 つの整数（consecutive integers）の**真に**間にあれば、$m$ は整数ではありえない。すると、手で調べるべき $n$ の値は少数しか残らない。小問 (ii) では、同じはさみ込み（squeeze）の議論を新しい方程式に適用する。

## 解答

全体を通して、$x \mapsto x^3$ が $\mathbb{R}$ 全体で狭義単調増加であるという事実を用いる。したがって、実数 $a, b$ に対して

$$a < b \iff a^3 < b^3.$$

が成り立つ。

### 小問 (i)(a)

$(*)$ より

$$m^3 - n^3 = n^2 + 1 > 0,$$

である。ここで $n^2 \geq 0$ を用いた。よって $m^3 > n^3$ であり、したがって $m > n$ である。

次に、$m < n+1$ であることは $m^3 < (n+1)^3$ であることと同値である。$(*)$ を用いて

展開すると

$$\begin{aligned} m^3 < (n+1)^3 &\iff n^3 + n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\iff 0 < 2n^2 + 3n, \end{aligned}$$

となり、これが求める同値関係（equivalence）である。各段階は逆にたどれるので、「同値」が成り立つ。

さて、$2n^2 + 3n = n(2n+3)$ である。これは根が $n = -\frac{3}{2}$ と $n = 0$ で、最高次の係数（leading coefficient）が正の二次式であるから、正となるのはちょうど $n < -\frac{3}{2}$ または $n > 0$ のときである。このような $n$ に対しては、$m > n$ と $m < n+1$ の両方が成り立つ。よって

$$n < m < n+1 \quad \text{ただし次の場合を除く：} \quad -\tfrac{3}{2} \le n \le 0.$$

### 小問 (i)(b)

$m$ と $n$ が $(*)$ を満たす整数であるとする。$n < -\frac{3}{2}$ または $n > 0$ ならば、小問 (a) より $n < m < n+1$ である。連続する整数 $n$ と $n+1$ の真に間にある整数は存在しないので、これは不可能である。

**考えてみよう** 小問 (a) はすべての実数 $n$ について成り立つ。では、整数であることはどこで効いてくるのか。

2 か所で効いてくる。上で見たように、区間の外にあるすべての $n$ を除外するところと、区間 $-\frac{3}{2} \le n \le 0$ を $n \in \{-1, 0\}$ に絞り込むところである。両方の値を確かめる。

- $n = 0$：$m^3 = 0 + 0 + 1 = 1$ より $m = 1$。
- $n = -1$：$m^3 = -1 + 1 + 1 = 1$ より $m = 1$。

どちらも整数の $m$ を与える。よって、整数解は $(m, n) = (1, 0)$ と $(1, -1)$ のみであり、示すべきことが示された。

### 小問 (ii)

小問 (i) と同じ手順をたどる。まず $p$ を $q$ と比べる。

$$p^3 - q^3 = 2q^2 - 1,$$

これは $q^2 > \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $q \neq 0$ であるすべての整数 $q$ に対して正である。このような $q$ に対しては $p > q$ である。

次に $p$ を $q+1$ と比べる。

$$\begin{aligned} p^3 < (q+1)^3 &\iff q^3 + 2q^2 - 1 < q^3 + 3q^2 + 3q + 1 \\ &\iff 0 < q^2 + 3q + 2 = (q+1)(q+2). \end{aligned}$$

これが成り立つのはちょうど $q > -1$ または $q < -2$ のときである。

2 つを合わせる。$q$ が $q \neq 0$、$q \neq -1$、$q \neq -2$ を満たす整数ならば $q < p < q+1$ であるから、$p$ は整数ではありえない（$q \geq 1$ または $q \leq -3$ ならば、両方の条件が成り立つ）。残るのは $q \in \{-2, -1, 0\}$ である。

- $q = 0$：$p^3 = -1$ より $p = -1$。
- $q = -1$：$p^3 = -1 + 2 - 1 = 0$ より $p = 0$。
- $q = -2$：$p^3 = -8 + 8 - 1 = -1$ より $p = -1$。

3 つとも整数の $p$ を与えるので、整数解は

$$(p, q) = (-1, 0), \quad (0, -1), \quad (-1, -2).$$

である。

## 検算

それぞれの答えをもとの式に代入してみる。たとえば $(-1)^3 = -1 = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1$ である。$|n|, |q| < 10^5$ を満たすすべての整数をコンピュータで探索すると、$(*)$ の解はちょうど 2 つ、小問 (ii) の解はちょうど 3 つ見つかり、それ以外は見つからない。はさみ込みを数値的に確かめることもできる。$n = 5$ のとき $m = \sqrt[3]{151} \approx 5.32$ であり、これは 5 と 6 の真に間にある。

## よくある間違い

- 小問 (ii) で $q = 0$ を忘れる。このとき $p^3 - q^3 = -1 < 0$ なので下からの評価 $p > q$ が成り立たず、この場合は別に調べる必要がある。
- 理由を書かずに「$m^3 > n^3$ より $m > n$」と書く。これが正しいのは 3 乗が狭義単調増加だからであり（2 乗では負の数を含むと成り立たない）、そのことは述べておく価値がある。
- $n < m < n+1$ で止めてしまい、それがなぜ $m$ が整数でないことを意味するのかを述べない。

## STEP のその先へ

$y^3 = f(x)$ のような方程式の整数点を求める問題は**ディオファントス方程式**（Diophantine equations）とよばれる。未知数を連続するべき乗の間にはさみ込むことは、これに対する標準的な最初の攻め方である。$y^2 = x^3 + k$ のようなより難しい方程式は、楕円曲線（elliptic curves）や、ベイカー（Baker）による対数の一次形式（linear forms in logarithms）の理論へとつながる。これらは奥の深い分野であるが、それでも多くの場合はこのような初等的な評価で解ける。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic* は、初等整数論（elementary number theory）へのよい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。