解答例

STEP I 2011、第 7 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

STEP I 2011、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q7

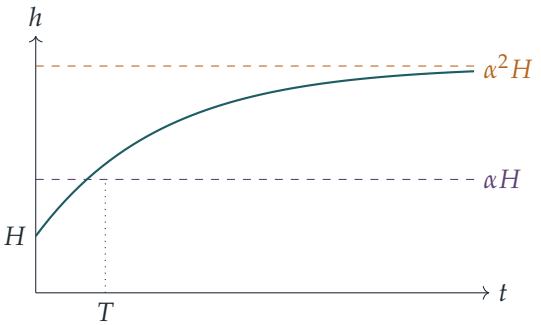
鍵となる考え方

体積は（一定の断面積）×（高さ）であるから、高さの変化率は単に（流入量 − 流出量）を断面積で割ったものである。「高さが一定に保たれる」という言い回しが流入量を決める手がかりになる。その高さでは流入と流出がちょうど釣り合っているのである。あとはどの小問も変数分離形の微分方程式（separable differential equation）であり、小問 (ii) では置換（substitution）$u = \sqrt{h}$ によって積分が定型的な計算に帰着する。

解答

一定の断面積（cross-sectional area）を A、一定の流入率（単位時間あたりの体積）を q とする。水の体積は Ah であるから、

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - (\text{流出率}).$$



高さは H から、流入と流出が釣り合う水位 $\alpha^2 H$ に向かって上昇し、限りなく近づくが決して到達しない。問われているのは αH に達するまでの時間であり、$1 < \alpha < \alpha^2$ であるからこの水位は両者の間にある。（図は小問 (i) の場合を示している。）

小問 (i)

流出率はある定数 $\lambda > 0$ を用いて λh と表されるから、

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - \lambda h.$$

$h = \alpha^2 H$ のとき高さは一定に保たれるので、そこで $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$ となり、$q = \lambda\alpha^2 H$ を得る。これを代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{A}\left(\alpha^2 H - h\right) = k\left(\alpha^2 H - h\right), \qquad k = \frac{\lambda}{A} > 0,$$

となり、求める式が得られた。

上昇の間はつねに $H \le h < \alpha^2 H$ であるから $\alpha^2 H - h > 0$ であり、変数を分離できる：

$$\begin{aligned} kT &= \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha^2 H - h} = \Big[-\ln\left(\alpha^2 H - h\right) \Big]_H^{\alpha H} = \ln\frac{\alpha^2 H - H}{\alpha^2 H - \alpha H} \\ &= \ln\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha} = \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

ここで $\alpha > 1$ より $\alpha - 1 \neq 0$ であるから約分した。これが求める結果である。

α が大きいとき $x = 1/\alpha$ は小さいので、

$$kT \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \approx \frac{1}{\alpha},$$

となる。α が大きいとき、第 2 項は第 1 項に比べて無視できるからである。

小問 (ii)

今度は流出率がある定数 $\mu > 0$ を用いて $\mu\sqrt{h}$ と表されるので、$A\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = q - \mu\sqrt{h}$ である。高さは $h = \alpha^2 H$ で一定となるから、（$\alpha > 0$ を用いて）$q = \mu\sqrt{\alpha^2 H} = \mu\alpha\sqrt{H}$ である。したがって

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c\left(\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}\right), \qquad c = \frac{\mu}{A} > 0.$$

やはり $h < \alpha^2 H$ である間は括弧内が正であるから、

$$cT' = \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}}.$$

考えてみよう 分母にある $\sqrt{h}$ はどう扱えばよいだろうか。

$u=\sqrt{h}$ と置換すると、$h=u^2$、$\mathrm{d}h=2u\,\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端は $u=\sqrt{H}$ と $u=\sqrt{\alpha H}$ になる。簡単のため $a=\alpha\sqrt{H}$ と書くと、被積分関数は有理関数（rational function）となり、割り算を実行して

$$\frac{2u}{a-u}=-2+\frac{2a}{a-u}.$$

したがって

$$\begin{aligned}cT'&=\int_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}}\left(-2+\frac{2a}{a-u}\right)\mathrm{d}u=\Big[-2u-2a\ln(a-u)\Big]_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}}\\&=-2\left(\sqrt{\alpha H}-\sqrt{H}\right)+2\alpha\sqrt{H}\ln\frac{\alpha\sqrt{H}-\sqrt{H}}{\alpha\sqrt{H}-\sqrt{\alpha}\sqrt{H}}\\&=2\sqrt{H}\left(1-\sqrt{\alpha}+\alpha\ln\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}}\right).\end{aligned}$$

$u\le\sqrt{\alpha H}<\alpha\sqrt{H}=a$ であるから（$\alpha>1$ のとき $\sqrt{\alpha}<\alpha$ なので）、対数の中身は正である。最後に $\alpha-1=(\sqrt{\alpha}-1)(\sqrt{\alpha}+1)$ および $\alpha-\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-1)$ と因数分解すると、

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}}=1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

となるので、

$$cT'=2\sqrt{H}\left(1-\sqrt{\alpha}+\alpha\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

となり、求める式が得られた。

α が大きいとき $1/\sqrt{\alpha}$ は小さいので、

$$\alpha\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\approx\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{2\alpha}\right)=\sqrt{\alpha}-\frac{1}{2}.$$

大きな項 $\pm\sqrt{\alpha}$ は打ち消し合い、

$$cT'\approx2\sqrt{H}\left(1-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{H}.$$

が残る。ここでは対数の x^2 の項が必要だったことに注意しよう。$\ln(1+x)\approx x$ だけを使うと括弧内は 1 となり、$2\sqrt{H}$ という誤った結果が得られてしまう。問題文が 2 項までの近似を与えているのはこのためである。

検算

- $\alpha\to1^+$ のとき、(i) からは $kT\to\ln2$ が得られ、0 にはならない。これは正しい。平衡（equilibrium）までの差ははじめ $(\alpha^2-1)H\approx2(\alpha-1)H$ であり、これが

$(\alpha^2-\alpha)H \approx (\alpha-1)H$ まで縮まらなければならない。つまり差は半分になるのであり、速さ k の指数関数的減衰（exponential decay）で半分になるのにかかる時間は $(\ln 2)/k$ である。(ii) では $cT' \to 2\sqrt{H}\ln 2$ となり、これは $h=H$ の近くで $\sqrt{h}$ を線形化（linearising）して得られる実効的な速さ $c/(2\sqrt{H})$ による同じ半減と一致する。

- $\alpha = 4$、$H = 1$ のとき：$kT = \ln 1.25 \approx 0.2231$、$cT' = 2(-1+4\ln 1.5) \approx 1.2437$ である。いくつかのランダムな H, α, k, c に対して両方の微分方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）で）解くと、どちらの公式も 10^{-9} の精度で再現される。
- $\alpha = 10^4$、$H = 2$ のとき：$\alpha\ln(1+1/\alpha) \approx 0.99995$、$cT'/\sqrt{H} \approx 1.0066$ であり、極限と整合している（次の項まで含めると $cT' \approx \sqrt{H}\,(1+\frac{2}{3\sqrt{\alpha}})$ となる）。

よくある間違い

- 平衡の条件を使って流入率を消去するのを忘れ、定数が多すぎるまま残ってしまう。
- 小問 (ii) で $\ln(1+x) \approx x$ だけを使い、決定的に重要な $-\frac{1}{2}$ を失ってしまう。
- $\sqrt{\alpha^2 H}$ を $\alpha^2\sqrt{H}$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

どちらのモデルも、$h = \alpha^2 H$ に安定平衡（stable equilibrium）をもつ 1 階の自励系微分方程式（first-order autonomous differential equation）$\dot{h} = f(h)$ である。線形の場合は姿を変えたニュートン（Newton）の冷却の法則（law of cooling）であり、$\sqrt{h}$ の場合は穴からの流出に関するトリチェリ（Torricelli）の法則である。陽に解くことなく平衡点とその安定性を調べることは、常微分方程式の定性的理論（qualitative theory of ODEs）の出発点である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は、その初めのほうの章で自励系の方程式とタンクの混合モデルを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。