解答例

STEP I 2011、第 6 問

純粋数学 • 二項級数の和

STEP I 2011、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q6

鍵となる考え方

$(1-x)^{-3}$ の係数（coefficients）がわかってしまえば、多項式（polynomial）を掛けることは隣り合ういくつかの係数を混ぜ合わせることにすぎない。したがって、より複雑な有理関数（rational function）の係数もほとんど労せずに得られる。この過程を逆にたどれば、項が (多項式、変数r) $\times x^r$ の形をした級数（series）は、それを生成する有理関数を見抜き、適切な x の値（ここでは $x=\frac{1}{2}$）を代入することで和を求められる。

解答

最初の結果

$|x|<1$ のとき、指数（index）-3 の二項展開（binomial expansion）により

$$(1-x)^{-3}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r.$$

分子は r 個の因数からなり、いずれも負であるから、その積は $(-1)^r\,\dfrac{(r+2)!}{2!}$ であり、この $(-1)^r$ は $(-x)^r$ から出る $(-1)^r$ と打ち消し合う。よって x^r の係数は

$$a_r=\frac{(r+2)!}{2!\,r!}=\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2),$$

となり、示すべき結果を得る。（したがって $a_0=1, a_1=3, a_2=6, a_3=10, \ldots$である。）

小問 (i)

次のように書く。

$$\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^3} = (1-x+2x^2)\sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

x^r の項は $1\cdot a_r x^r$、$-x\cdot a_{r-1}x^{r-1}$、$2x^2\cdot a_{r-2}x^{r-2}$ から生じるので、$r\geq 2$ のとき x^r の係数は

$$\begin{aligned} a_r - a_{r-1} + 2a_{r-2} &= \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) - \tfrac{1}{2}r(r+1) + (r-1)r \\ &= (r+1) + r^2 - r \\ &= r^2 + 1. \end{aligned}$$

考えてみよう a_{r-1} や a_{r-2} が存在しない $r=0$ や $r=1$ の場合にも、この式は成り立つだろうか。

成り立つ。$a_{-1} = a_{-2} = 0$ と定めると、式 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ も $r=-1$ と $r=-2$ で 0 を与えるので、上の計算はすべての $r\geq 0$ に対して有効である。直接確かめると、定数項は $a_0 = 1 = 0^2+1$ であり、x の係数は $a_1 - a_0 = 2 = 1^2+1$ である。よって、すべての $r\geq 0$ に対して x^r の係数は r^2+1 であり、示すべき結果を得る。

級数については、分子 $1,2,5,10,17,26,37,50,\ldots$ は $r=0,1,2,\ldots$ に対する r^2+1 であり、分母は 2^r である。よってこの級数は

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r^2+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^r,$$

であり、これは上の展開に $x=\frac{1}{2}$ を代入したものである。$(1-x)^{-3}$ の二項展開は $|x|<1$ で収束（converge）するので、この代入は正当である。したがって

$$1+\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{10}{8}+\cdots = \frac{1-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

小問 (ii)

最初の仕事は規則性を見つけることである。分母を $1,2,4,8,16,32,64$ として項を書き直すと

$$1, \frac{4}{2}, \frac{9}{4}, \frac{16}{8}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}, \frac{49}{64}, \cdots$$

となるので、この級数は $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+1)^2}{2^r}$ である。

考えてみよう $(1-x)^3$ の上にどのような分子を置けば、係数が $(r+1)^2$ になるだろうか。

小問 (i) からすると、分子として（ここでも短い多項式である）$1+x$ を試してみるのがよさそうである。$(1+x)(1-x)^{-3}$ における x^r の係数は

$$a_r + a_{r-1} = \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) + \tfrac{1}{2}r(r+1) = \tfrac{1}{2}(r+1)(2r+2) = (r+1)^2,$$

であり、これは（先ほどと同様に $a_{-1}=0$ とすれば）すべての $r \geq 0$ に対して成り立つ。$x = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$1+2+\frac{9}{4}+2+\frac{25}{16}+\cdots = \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}\cdot 8 = 12.$$

別解：小問 (i) を利用する。$s = r+1$ として添字をずらすと、$2^{-r} = 2\cdot 2^{-s}$ であるから

$$\sum_{r\geq 0}\frac{(r+1)^2}{2^r} = 2\sum_{s\geq 1}\frac{s^2}{2^s} = 2\left(\sum_{s\geq 0}\frac{s^2+1}{2^s} - \sum_{s\geq 0}\frac{1}{2^s}\right) = 2(8-2) = 12,$$

となる。ここで小問 (i) の答えと等比級数（geometric series）$\sum 2^{-s} = 2$ を用いた。

検算

- $(1-x)^{-3}$ を $(1+x+x^2+\cdots)^3$ として手で展開するか、いくつかの項を掛け合わせると $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$ となり、$\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ と一致する。
- 小問 (i) の級数の部分和（partial sums）は 8 に近づく。200 項まで足すと、和は計算機の精度の範囲で 8 に一致する。小問 (ii) についても同様に、極限 12 が確かめられる。
- 小問 (ii) の二通りの解法は同じ答え 12 を与える。

よくある間違い

- 二項係数の符号を誤る。$(-3)(-4)\cdots$ から r 個、$(-x)^r$ から r 個の負号が出て、それらは打ち消し合う。
- 小問 (ii) で、一部の分数が既約分数で与えられているために規則性を読み違える。$2 = \frac{4}{2} = \frac{16}{8}$ であり、$\frac{9}{8} = \frac{36}{32}$ である。
- 展開がそこで収束すること（$|x|<1$）に触れずに $x = \frac{1}{2}$ を代入する。

STEP のその先へ

ここまで行ってきたのは**母関数**（generating functions）の利用である。数列 $c_0, c_1, c_2, \ldots$ をべき級数（power series）$\sum c_r x^r$ として符号化すると、数列に対する操作が関数の代数計算になる。実際、r の任意の多項式に x^r を掛けたものの和は、分母が $(1-x)$ のべきである有理関数になる。これらの和が常に有理数になるのはそのためである。x に値を代入することの正当化は、べき級数とその収束半径（radius of convergence）の理論に基づいており、これは Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）で扱われている。問題解決の道具としての母関数については Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。