解答例

STEP I 2011、第 5 問

純粋数学 • 絶対値を含む積分

> **STEP I 2011、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q5

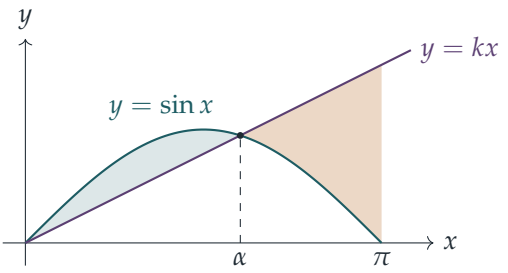
鍵となる考え方

絶対値（modulus）記号が厄介なのは、$\sin x - kx$ の符号がどこで変わるかがわからないうちだけである。そしてそれは図が教えてくれる。符号が変わるのはただ一度、$x = \alpha$ においてである。そこで積分を分割すれば、絶対値記号は消える。最後の一歩は、k を変数とみなすのをやめることである。$k = \sin\alpha/\alpha$ であるから、すべてを α で表すことができ、そうすると I の導関数（derivative）はきれいに因数分解（factorise）できる。

解答

ただ一つの解

$g(x) = \sin x - kx$ とおく。直線 $y = kx$ は原点を通り、傾き $k < 1$ をもつ。一方、$y = \sin x$ は原点から傾き $\cos 0 = 1$ で出発する。したがって、0 のすぐ右側では正弦曲線のほうが直線より上にある。$x = \pi$ では正弦曲線は再び 0 に戻るが、直線は高さ $k\pi > 0$ にあるので、そこでは直線のほうが上にある。$y = \sin x$ は $(0, \pi)$ で下に曲がっており、直線はまっすぐであるから、両者はその間でちょうど一度だけ交わる。



「ちょうど一度」を厳密にしておこう。$g(0)=0$、$g'(x)=\cos x-k$ であり、$(0,\pi)$ で $g''(x)=-\sin x<0$ である。よって g' は狭義単調減少（strictly decreasing）であり、0 における $1-k>0$ から π における $-1-k<0$ まで減少するので、ちょうど一点 β で 0 になる。ゆえに g は $(0,\beta]$ で狭義単調増加であり、（0 から出発するので）そこでは正である。また $[\beta,\pi)$ では正の値から $g(\pi)=-k\pi<0$ まで狭義単調減少する。したがって g は $(0,\pi)$ にちょうど一つの零点 α をもち、

$$\sin x>kx \text{ となるのは} 0<x<\alpha, \qquad \sin x<kx \text{ となるのは} \alpha<x<\pi.$$

I の計算

これらの符号（図の青緑色と琥珀色の領域）を用いると、

$$I=\int_0^{\alpha}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x-kx$ の原始関数（antiderivative）の一つは $F(x)=-\cos x-\frac{1}{2}kx^2$ であるから、

$$\begin{aligned}I&=(F(\alpha)-F(0))-(F(\pi)-F(\alpha))=2F(\alpha)-F(0)-F(\pi)\\&=(-2\cos\alpha-k\alpha^2)+1-(1-\tfrac{1}{2}k\pi^2)\\&=\tfrac{1}{2}k\pi^2-2\cos\alpha-k\alpha^2.\end{aligned}$$

α は $(*)$ の解であるから $k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ であり、よって $k\alpha^2=\alpha\sin\alpha$ となって

$$I=\frac{\pi^2\sin\alpha}{2\alpha}-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha,$$

が得られる。これが示すべきことであった。

停留値

考えてみよう α はどのような値をとりうるか。

各 $k\in(0,1)$ に対して $\alpha\in(0,\pi)$ が一つ定まる。逆に、各 $\alpha\in(0,\pi)$ は $k=\sin\alpha/\alpha$ から得られ、この範囲では $0<\sin\alpha<\alpha$ であるから、この k は $(0,1)$ に属する。したがって、開区間（open interval）$(0,\pi)$ のすべての α について $I(\alpha)$ を調べればよい。

第 1 項には商の微分法（quotient rule）を用いて微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2} + 2\sin\alpha - (\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)\\ &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2} - (\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &= (\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{\pi^2}{2\alpha^2}-1\right).\end{aligned}$$

第 1 因数は $(0,\pi)$ で決して 0 にならない。実際、$h(\alpha) = \alpha\cos\alpha - \sin\alpha$ とおくと、$h(0) = 0$ であり、$(0,\pi)$ で $h'(\alpha) = \cos\alpha - \alpha\sin\alpha - \cos\alpha = -\alpha\sin\alpha < 0$ であるから、この区間全体で $h(\alpha) < 0$ となる。（同じことだが、$(0, \frac{1}{2}\pi)$ では $\tan\alpha > \alpha$ であり、その先では $\cos\alpha \le 0$ である。）

よって $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ となるのは $\pi^2 = 2\alpha^2$ のとき、すなわち $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ のときに限られ、これは確かに $(0,\pi)$ に属する。これがただ一つの停留値（stationary value）を与える。$h < 0$ であるから、$\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha$ の符号は $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} - 1$ の符号と逆である。

- $0 < \alpha < \pi/\sqrt{2}$ では $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} > 1$ であるから $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha < 0$ である。
- $\pi/\sqrt{2} < \alpha < \pi$ では $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} < 1$ であるから $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha > 0$ である。

したがって I は減少したのち増加する。よってこの停留値は極小値であり、区間内でただ一つの停留点であるから、I の最小値である。

$\alpha = \pi/\sqrt{2}$ では $\dfrac{\pi^2}{2\alpha} = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{2}\,\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \alpha$ となるので、I の第 1 項と第 3 項が打ち消し合う。

$$I_{\min} = \alpha\sin\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha = -2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\pi/\sqrt{2} \approx 2.22$ は余弦が負となる $\frac{1}{2}\pi$ と π の間にあるから、この値は当然そうあるべきとおり正である。

検算

- $k \to 0$ のとき $\alpha \to \pi$ であり、公式から $I \to 2$ が得られる。これは $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ に等しい。$k \to 1$ のとき $\alpha \to 0$ であり、$I \to \frac{1}{2}\pi^2 - 2$ となる。これは $\int_0^\pi (x - \sin x)\,\mathrm{d}x$ に等しい。
- 数値的には $-2\cos(\pi/\sqrt{2}) \approx 1.2114$ であり、これは両端の値 2 と $\frac{1}{2}\pi^2 - 2 \approx 2.935$ のどちらよりも小さい。$k = \sin\alpha/\alpha \approx 0.3582$ として $\int_0^\pi |\sin x - kx|\,\mathrm{d}x$ を中点則による数値積分（midpoint quadrature）で直接計算しても、1.2114 が得られる。

よくある間違い

- k を定数とみなしたまま α について微分してしまうこと。k は α に依存しており、だからこそ最初に $k = \sin\alpha/\alpha$ を代入するのである。
- $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$ となるのが $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ だけであることを示す際に、$\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$ が $(0, \pi)$ に零点をもたないことを示し忘れること。

STEP のその先へ

ただ一つの解の存在を示す議論では、中間値の定理（intermediate value theorem）と狭義単調性を組み合わせて用いている。また最小化の議論では、$\alpha \mapsto k$ が $(0, \pi)$ と $(0, 1)$ の間の全単射（bijection）であり、したがって α について最小化することは k について最小化することと同じである、という事実をさりげなく用いている。このような変数の取り替え（reparametrisation）や存在の議論を厳密にすることは、実解析（real analysis）の最初の講義の仕事である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学入門』）は、その出発点として最適な一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。