解答例

STEP I 2011、第 4 問

純粋数学 • 放物線の接線

> **STEP I 2011、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q4

鍵となる考え方

放物線（parabola）上の一般の点における接線（tangent）を分数を含まない形で書けば、2 本の接線の交点は引き算するだけで求まる。角については、$\overrightarrow{FT}$ と $\overrightarrow{FP}$ の内積（scalar product）を用いる。長さは見かけほど厄介ではない。FP は焦点距離（focal distance）であり、FT^2 は因数分解できる。$\cos\phi$ が求まったら、その答えが p と q について対称であることに注目しよう。この対称性こそが、二等分（bisection）の議論のすべてである。

解答

点 T

$y^2 = 4ax$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$ となるので、$y = 2ap \neq 0$（$p \neq 0$ より）である点 P における傾き（gradient）は $\dfrac{4a}{4ap} = \dfrac{1}{p}$ である。したがって P における接線は

$$y - 2ap = \frac{x - ap^2}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + ap^2,$$

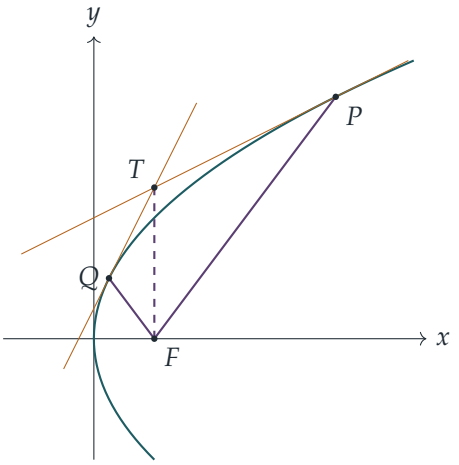
であり、同様に Q における接線は $qy = x + aq^2$ である。辺々引くと

$$(p - q)\,y = a(p^2 - q^2) = a(p - q)(p + q).$$

P と Q は異なる点なので $p \neq q$ であり、$p - q$ で割って $y = a(p + q)$ を得る。すると

$$x = py - ap^2 = ap^2 + apq - ap^2 = apq,$$

となるので、T は点 $(apq,\, a(p+q))$ であり、題意が示された。



図は $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$ の場合であり、このときたまたま FT は鉛直になる。

角 ϕ

まず $T \neq F$ であることに注意する。$T=F$ となるには $p+q=0$ かつ $pq=1$ が必要であり、そうすると $p^2=-1$ となって不可能である。よって角 TFP は意味をもつ。$F=(a,0)$ とすると

$$\overrightarrow{FP}=a\begin{pmatrix}p^2-1\\2p\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{FT}=a\begin{pmatrix}pq-1\\p+q\end{pmatrix}.$$

長さは

$$FP^2=a^2[(p^2-1)^2+4p^2]=a^2(p^2+1)^2,$$
$$FT^2=a^2[(pq-1)^2+(p+q)^2]=a^2[p^2q^2+p^2+q^2+1]=a^2(p^2+1)(q^2+1),$$

である。交差項 $-2pq$ と $+2pq$ が打ち消し合うからである。よって $FP=|a|(p^2+1)$、$FT=|a|\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}$ である。

考えてみよう 内積が因数分解できることに、どうすれば気づけるだろうか？

(p^2+1) が FP と約分されることを期待して、この因数を探す。展開すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}&=a^2[(p^2-1)(pq-1)+2p(p+q)]\\&=a^2[p^3q-p^2-pq+1+2p^2+2pq]\\&=a^2[p^3q+pq+p^2+1]\\&=a^2(p^2+1)(pq+1).\end{aligned}$$

したがって、$|a|^2 = a^2$ を用いると

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}}{FP\cdot FT} = \frac{a^2(p^2+1)(pq+1)}{a^2(p^2+1)\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}} = \frac{pq+1}{\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}},$$

となり、求める結果が得られた。

二等分

T の座標は p と q について対称なので、上の計算で P と Q の役割を入れ替えると、角 TFQ について

$$\cos\angle TFQ = \frac{qp+1}{\sqrt{(q^2+1)(p^2+1)}} = \cos\phi.$$

が成り立つ。どちらの角も $[0,\pi]$ の範囲にあり、そこでは余弦は一対一（one-to-one）であるから、$\angle TFP = \angle TFQ = \phi$ である。

よって半直線（ray）FP と FQ はいずれも半直線 FT と角 ϕ をなす。平面上で、F から出て FT と角 ϕ をなす半直線は 2 本しかなく、それらは直線 FT に関して互いに鏡映の関係にある。半直線 FP と FQ は同じ半直線ではない。焦点（focus）を通る直線は放物線と F の両側にある 2 点で交わる（あるいは 1 点でしか交わらない）ので、F から出る 1 本の半直線が P と Q の両方を通ることはありえないからである。したがって FP と FQ は直線 FT に関して互いの鏡映であり、これはまさに直線 FT が角 PFQ を二等分するという主張にほかならない。

問題文が**直線** FT と言っている理由は、次の細部によって説明される。$pq+1>0$ ならば $\phi < \frac{\pi}{2}$ であり、半直線 FT そのものが角 $PFQ = 2\phi$ の内側にある。$pq+1<0$ ならば $\phi > \frac{\pi}{2}$ であり、角 PFQ は $2\pi - 2\phi$ となって、これを二等分するのは TF を F の先へ延長した部分である。$pq=-1$ ならば PQ は焦点弦（focal chord）であり、$\phi = \frac{\pi}{2}$ で、FT はそれに垂直となって平角（straight angle）を二等分する。いずれの場合も、直線 FT は角 PFQ を二等分する。

検算

図と同じく $a=1$、$p=2$、$q=\frac{1}{2}$ とすると、$T=(1,\frac{5}{2})$、$\overrightarrow{FP}=(3,4)$、$\overrightarrow{FQ}=(-\frac{3}{4},1)$、$\overrightarrow{FT}=(0,\frac{5}{2})$ である。このとき $\cos\angle TFP = \frac{4}{5}$、$\cos\angle TFQ = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$ となり、$\dfrac{2}{\sqrt{5\cdot\frac{5}{4}}} = \dfrac{4}{5}$ と一致する。a（正負どちらも）、p、q を 10^5 通り無作為に選んでコンピュータで検証したところ、T の座標、$\cos\phi$ の公式、二等分のいずれも 10^{-10} 以内の精度で確認された。その中には $pq<-1$ の場合も多く含まれており、その場合は FT の逆向きの延長が二等分している。

よくある間違い

- $p-q$ が 0 でない理由（2 点が異なること）を述べずに $p-q$ で割ってしまう。
- $FP = a(p^2+1)$ と書いてしまう。これは $a<0$ のとき誤りである。ただし $\cos\phi$ には a^2 しか現れないので、最終的には a の符号は影響しない。
- FP と FQ が直線 FT の反対側にある理由を説明せずに、「余弦が等しいので FT は二等分する」と言ってしまう。

STEP のその先へ

これは姿を変えた放物線の反射の性質（reflective property）である。すなわち、外部の任意の点から引いた 2 本の接線の線分は、焦点から見て等しい角をなす。同じことは楕円（ellipse）と双曲線（hyperbola）についても成り立ち、3 つとも円錐曲線（conic）の焦点・準線（focus–directrix）による定義から導かれる。この定義は、大学 1 年の幾何学や射影幾何学（projective geometry）の講義でさらに深く展開される。この種の問題をもっと解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『上級数学問題集』）が無料で入手でき、取り組む価値が大いにある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。