解答例

STEP I 2011、第 3 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式

STEP I 2011、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q3

鍵となる考え方

$\frac{1}{3}\pi \mp \theta$ における 2 つの正弦（sine）の積は、平方の差（difference of squares）の技法によってきれいにまとまり、これにより $(*)$ が 1 行で証明できる。その後、余接（cotangent）の和は積を微分することから得られる。3 つの因数の積の導関数をその積自身で割ると、3 つの「対数微分（logarithmic derivative）」の和になり、正弦の場合それらは余接になる。余弦（cosine）版に同じことを行うと正接（tangent）が得られ、さらに $\tan x + \cot x$ は余割（cosecant）になる。

解答

恒等式 $(*)$

$a = \frac{1}{3}\pi$ とおく。加法定理（compound-angle formulae）により、

$$\begin{aligned}\sin(a-\theta)\sin(a+\theta) &= (\sin a\cos\theta - \cos a\sin\theta)(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)\\ &= \sin^2 a\cos^2\theta - \cos^2 a\sin^2\theta\\ &= \sin^2 a\,(1-\sin^2\theta) - (1-\sin^2 a)\sin^2\theta = \sin^2 a - \sin^2\theta.\end{aligned}$$

$\sin^2 a = \frac{3}{4}$ であるから、3 倍角の公式（triple-angle formula）により

$$4\sin\theta\sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 4\sin\theta\left(\tfrac{3}{4}-\sin^2\theta\right) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$$

となる。これで、すべての θ について $(*)$ が証明された。

小問 (i)

$(*)$ はすべての θ について成り立つので、両辺を微分してよい。積の微分法（product rule）により、

$$4\Big[\cos\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)-\sin\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\\ +\sin\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\Big]=3\cos 3\theta$$

となる。ここで中央の項の負号は、$a-\theta$ に合成関数の微分法（chain rule）を適用したことから生じる。

考えてみよう これをどうすれば余接に変えられるだろうか？

両辺を $\sin 3\theta$ で割る。これは $(*)$ により $4\sin\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)$ に等しい。左辺の各項では、微分された因数以外の正弦がすべて消える。この操作は $\sin 3\theta\neq 0$ のときには常に許され、そのとき3つの正弦もすべて0でない。こうして

$$\cot\theta-\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\cot 3\theta\qquad(\sin 3\theta\neq 0).\tag{A}$$

を得る。ここで $\theta=\frac{1}{9}\pi$ とおくと、$\sin 3\theta=\sin\frac{1}{3}\pi\neq 0$ である。$\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$、$\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$ であるから、

$$\cot\tfrac{1}{9}\pi-\cot\tfrac{2}{9}\pi+\cot\tfrac{4}{9}\pi=3\cot\tfrac{1}{3}\pi=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

$(*)$ において $\theta=\frac{1}{6}\pi-\phi$ とおく。4つの正弦は

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sin(\tfrac{1}{6}\pi-\phi)=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)&=\sin(\tfrac{1}{6}\pi+\phi)=\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)&=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\phi)=\cos\phi,\\ \sin 3\theta&=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-3\phi)=\cos 3\phi,\end{aligned}$$

となる。いずれも $\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$ を用いた。したがって、ϕ を θ と書き直せば

$$4\cos\theta\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cos 3\theta\qquad\text{任意の}\theta.\tag{**}$$

が成り立つ。$(*)$ を $(**)$ で割ると、因数4は約分され、正弦を余弦で割ったものはそれぞれ正接になる。逆数をとって

$$\cot\theta\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cot 3\theta,$$

を得る。これは両辺が定義される範囲、すなわち $\sin 3\theta \neq 0$ かつ $\cos 3\theta \neq 0$ となるところで成り立つ（それぞれの条件により、対応する 3 つの因数が 0 でなくなる）。

余割の和を得るために、小問 (i) とまったく同様に $(**)$ を微分する：

$$4\Big[-\sin\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)+\cos\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta) \\ -\cos\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\Big] = -3\sin 3\theta.$$

$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)$ で割り（これが 0 でないとき）、-1 を掛けると

$$\tan\theta - \tan(\tfrac{1}{3}\pi-\theta) + \tan(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 3\tan 3\theta. \qquad \text{(B)}$$

となる。(A) と (B) の符号は一致しているので、両者を足し合わせることができる。

? 考えてみよう なぜ正接と余接を足すと役に立つのだろうか？

$\tan x + \cot x$ は 1 つの余割になるからである：

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

よって $\sin 6\theta \neq 0$ のとき、(A) と (B) を足すと

$$2\operatorname{cosec} 2\theta - 2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi - 2\theta) + 2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi + 2\theta) = 6\operatorname{cosec} 6\theta.$$

を得る。ここで $\theta = \frac{1}{18}\pi$ とすると、$2\theta = \frac{1}{9}\pi$、$6\theta = \frac{1}{3}\pi$ である（$\sin 6\theta \neq 0$ を満たす）。$\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{9}\pi = \frac{5}{9}\pi$、$\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{9}\pi = \frac{7}{9}\pi$ であるから、2 で割って

$$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{9}\pi - \operatorname{cosec}\tfrac{5}{9}\pi + \operatorname{cosec}\tfrac{7}{9}\pi = 3\operatorname{cosec}\tfrac{1}{3}\pi = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $\theta = \frac{1}{6}\pi$ において $(*)$ は $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1 = \sin\frac{1}{2}\pi$ となり、$\theta = 0$ において $(**)$ は $4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 = \cos 0$ となる。
- 数値的には、$\cot 20^\circ - \cot 40^\circ + \cot 80^\circ \approx 2.7475 - 1.1918 + 0.1763 = 1.7321 \approx \sqrt{3}$ であり、$\operatorname{cosec} 20^\circ - \operatorname{cosec} 100^\circ + \operatorname{cosec} 140^\circ \approx 2.9238 - 1.0154 + 1.5557 = 3.4641 \approx 2\sqrt{3}$ である。
- 恒等式 (A)、(B) および余接の積の式は、電卓を使って任意の θ で確かめることができる。我々は数千個のランダムな値で確認した。

よくある間違い

- $\sin(\frac{1}{3}\pi - \theta)$ を微分するときに合成関数の微分法による負号を忘れ、(A) の交互に変わる符号を崩してしまう。
- 代入する値において $\sin 3\theta$ が 0 でないことを確認せずに、それで割ってしまう。
- 余割の和を余接の積から得ようとする。組み合わせるべきなのは和 (A) と (B) である。

STEP のその先へ

導関数を関数自身で割る技法は対数微分法である：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f| = f'/f$ は積を和に変える。これをさらに推し進めると、sin そのものをその零点にわたる無限積（infinite product）として表すことができ、対数微分によって有名な部分分数展開（partial-fraction expansion）$\pi\cot\pi x = \sum_n \frac{1}{x-n}$ が得られる。恒等式 $(*)$ はこの有限版の影のようなものである。これらの考え方は複素解析（complex analysis）で展開される。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、学び始めるのにうってつけの美しい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。