解答例

STEP I 2011、第 2 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 2011、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q2

鍵となる考え方

積分（integral）E は初等的な閉じた形（elementary closed form）をもたないので、これを直接計算しようとはしない。その代わりに、ほかの積分をそれぞれ変形して、E そのものが現れるようにする。最初の二つについては、代数的な割り算によって分数を分解し、扱いにくい $\frac{1}{1+x}$ を切り離すことを意味する。(i) と (ii) については、被積分関数（integrand）を $[0,1]$ 上の $\frac{\mathrm{e}^u}{1+u}$ に戻すような置換（substitution）を選ぶことを意味する。指数の部分に注目し、何を新しい変数にすればよいかを考えるのである。

解答

最初の二つの積分

$x = (1+x) - 1$ と書くと、

$$\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x} = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x}{1+x},$$

であるから、

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - E = \mathrm{e} - 1 - E,$$

となり、求める結果が得られる。

二つ目については、x^2 を $1+x$ で割る。$x^2 = (x-1)(1+x)+1$ であるから、

$$\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x} = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

$u = x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

したがって

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1-(\mathrm{e}-1)+E = 2-\mathrm{e}+E.$$

(別解として、$\frac{x^2}{1+x} = x - \frac{x}{1+x}$ と書いて最初の結果をそのまま用いてもよい。$1-(\mathrm{e}-1-E)$ から同じ答えが得られる。)

小問 (i)

厄介なのは指数の部分なので、それを新しい変数にする：

$$u = \frac{1-x}{1+x}.$$

x について解くと、$u(1+x) = 1-x$ より $x = \dfrac{1-u}{1+u}$ である。すると

$$1+x = \frac{2}{1+u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{-(1+u)-(1-u)}{(1+u)^2} = -\frac{2}{(1+u)^2}.$$

$x=0$ のとき $u=1$、$x=1$ のとき $u=0$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \mathrm{e}^u \cdot \frac{1+u}{2} \cdot \left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = E.\end{aligned}$$

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ から出てくる負号は、積分区間の上端と下端を入れ替えて増加の順に戻すのに使った。

考えてみよう なぜ答えが、e をまったく含まないちょうど E になると予想できるのだろうか？

写像 $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ は $[0,1]$ をそれ自身に移し（両端を入れ替える）、因子 $\frac{1}{1+x}$ は $\mathrm{d}x$ と組み合わさってちょうど $\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$ になる。実際 $\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$ であり、これは計算全体を覚えておくうまい方法である。

小問 (ii)

今度は、目標の区間 $[0,1]$ が $x \in [1,\sqrt{2}]$ から生じなければならない。この範囲で x^2 は 1 から 2 まで動く。そこで

$$u = x^2 - 1, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,$$

を試す。$x=1$ のとき $u=0$、$x=\sqrt{2}$ のとき $u=1$ である。すると

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)}, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^u,$$

であるから、

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}E}{2}.$$

考えてみよう なぜ $u = x^2$ と置換しないのだろうか？

その置換でもうまくいき、$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$ が得られるが、区間は $[0,1]$ ではなく $[1,2]$ になる。さらに $u \mapsto u-1$ と 1 だけずらせば同じ答えにたどり着く。$u = x^2 - 1$ は、この二つの手順を一度に行っているにすぎない。

検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）によれば $E \approx 1.125386$ である。数値的には、最初の積分は $0.592896 = \mathrm{e} - 1 - E$、二つ目は $0.407104 = 2 - \mathrm{e} + E$、(i) の積分は $1.125386 = E$、(ii) の積分は $1.529558 = \frac{1}{2}\mathrm{e}E$ である。コンピュータを使わない簡単な確認としては、最初の二つの被積分関数はどちらも正であり、実際 $\mathrm{e} - 1 - E \approx 0.59 > 0$、$2 - \mathrm{e} + E \approx 0.41 > 0$ となっている。また、$[0,1]$ 上で $x^2 \leq x$ であるから二つ目は一つ目より小さくなるはずであり、実際そうなっている。

よくある間違い

- (i) で積分区間の上端と下端を入れ替え忘れる（あるいは負号を落とす）と $-E$ が得られるが、被積分関数が正なのでこれはありえない答えである。
- (ii) で、$\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u}$ から出てくる因子 e や、$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ から出てくる因子 $\frac{1}{2}$ を落とす。

STEP のその先へ

E のような積分は**指数積分**（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ と結びついている。$t = 1 + x$ と置換すると $E = \mathrm{e}^{-1}\big(\mathrm{Ei}(2) - \mathrm{Ei}(1)\big)$ であることがわかる。リウヴィル（Liouville）の理論により、$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$ は初等的な原始関数（antiderivative）をもたないことが示される。まさにそのために、この問題では E を名前のついた定数として扱い、すべてをそれに帰着させるよう求めているのである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この趣旨の問題がさらに数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。