解答例

STEP I 2011、第 12 問

確率・統計 ・ 待ち行列と投票問題

> **STEP I 2011、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.10 節「**いつでもおつりを渡せる**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/ballot.html

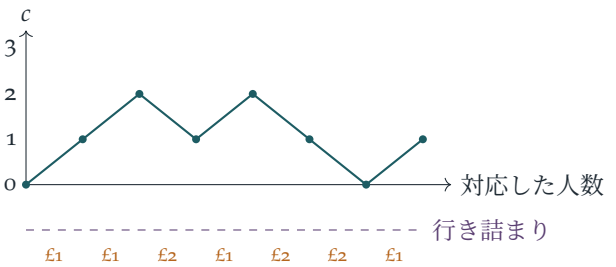
鍵となる考え方

追いかける数は一つだけでよい。それは、私が手元に持っている £1 硬貨の枚数である。£1 硬貨で払う客が来るとこれが一枚増え、£2 硬貨で払う客が来ると一枚減る（受け取った £2 硬貨は釣り銭（change）としては役に立たない）。私が行き詰まるのは、ちょうど £2 の客が来たときに £1 硬貨を一枚も持っていない場合である。£2 の客が少数しかいないときは、危険はすべて列の先頭部分に集中している。そこで最初の数人に注目し、それぞれの始まり方からどのような状況になるかを調べる。

解答

問題になるのは列に並ぶ硬貨のパターンだけであり、誰が並んでいるかは関係ない。人の並び方はすべて同様に確からしいので、どの位置にいる人も、まだ並べられていない人のうちの誰であるかが等しい確率である。したがって列を先頭から順に作っていけばよい。£1 硬貨を持つ人が a 人、£2 硬貨を持つ人が b 人残っているとき、次の人が £1 硬貨を持つ確率（probability）は $\frac{a}{a+b}$、£2 硬貨を持つ確率は $\frac{b}{a+b}$ である。

私が持っている £1 硬貨の枚数を c とする。全員に売ることができるのは、c が 0 を下回る必要が一度もないとき、かつそのときに限る。すなわち、列のどの時点でも、それまでに対応した £1 の客の人数が £2 の客の人数以上であるときである。



図はうまくいく列の例である。c の経路は一度も破線に触れていない。

小問 (i)

£2 の客が一人だけのとき、行き詰まるのはその人が列の先頭にいて、私が釣り銭を持っていない場合に限られる。ほかの誰かが先頭にいれば、£2 の客が来る時点で私は少なくとも一枚の £1 硬貨を持っている。£2 の客は $m+1$ 個の位置のどれにいることも同様に確からしいので、

$$\mathrm{P}(\text{全員に売れる}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

小問 (ii)

£1 の客を 1、£2 の客を 2 と書き、列の始まり方を列挙する。

- 先頭の人が 2 ならば、ただちに行き詰まる。
- 列が 1,2,2 で始まるならば、c は 1,0 と変化し、3 人目で行き詰まる。
- 列が 1,1 で始まるならば、2 人の後で $c = 2$ である。£2 の客は全部で 2 人しかおらず、c が減るのはそのどちらかに対応したときだけなので、c が $2-2=0$ を下回ることはない。成功である。
- 列が 1,2,1 で始まるならば、c は 1,0,1 と変化し、£2 の客は残り 1 人だけなので、c が 0 を下回ることはない。成功である。

これらの場合ですべての可能性を尽くしているので、全員に売れるのは列が 1,1 または 1,2,1 で始まるときであり、かつそのときに限る。列を先頭から作っていくと、

$$\mathrm{P}(1,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}, \quad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{2}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m} = \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+1)}.$$

これらの事象は互いに排反（disjoint）であるから、

$$\mathrm{P}(\text{全員に売れる}) = \frac{m(m-1)+2(m-1)}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m+2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1},$$

となり、示すべき結果が得られた。（最後の因数で £1 の客が $m-1 \geq 1$ 人残っている必要があるので、$m \geq 2$ が必要である。）

小問 (iii)

今度は £2 の客が 3 人いる。ここでも最初の 3 人に注目する。

- 2 で始まる場合、または 1,2,2 で始まる場合：(ii) とまったく同様に行き詰まる。
- 1,1,1 で始まる場合：$c = 3$ となり、3 人の £2 の客は最悪でも c を 0 まで減らすだけである。成功である。
- 1,1,2 または 1,2,1 で始まる場合：どちらの場合も 3 人の後で $c = 1$ であり、残りは £1 硬貨を持つ $m-2$ 人と £2 硬貨を持つ 2 人が無作為な順序で並んだものである。

考えてみよう 最後の場合、列の残りの部分がうまくいかないのはどのようなときか。

$c = 1$ の状態で列の残りを始めるのは、£2 の客が 2 人いる列の先頭に、おまけの £1 の客が 1 人いるのと同じであり、これは小問 (ii) の姿を変えたものである。$c = 1$ で £2 の客が 2 人だけ残っているとき、行き詰まるのは次の 2 人がともに £2 の客である場合に限られる。このとき c は 0 になり、その次の人に対応できない。次の 2 人のどちらかが £1 硬貨を持っていれば、c が 0 を下回ることはない（(ii) と同様に $1,\ldots$ と $2,1,\ldots$ を確かめよ）。最初の 3 人の後に残る m 人について、

$$\mathrm{P}(\text{次の 2 人がともに2}) = \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{m-1},$$

$$\text{よって}\quad \mathrm{P}(\text{残りがうまくいく}) = 1 - \frac{2}{m(m-1)} = \frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)},$$

ここで $m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$ を用いた。

$D = (m+3)(m+2)(m+1)$ とおく。役に立つ始まり方の確率は

$$\mathrm{P}(1,1,1) = \frac{m(m-1)(m-2)}{D},$$

$$\mathrm{P}(1,1,2) = \frac{m \cdot (m-1) \cdot 3}{D}, \qquad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m \cdot 3 \cdot (m-1)}{D}.$$

始まり方どうしは互いに排反であり、どの始まり方であっても列の残りはやはり無作

為な順序になっているので、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{success}) &= \frac{m(m-1)(m-2)}{D} + \frac{6m(m-1)}{D}\cdot\frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)}\\ &= \frac{(m-2)\big[m(m-1)+6(m+1)\big]}{D} = \frac{(m-2)(m^2+5m+6)}{D}\\ &= \frac{(m-2)(m+2)(m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)} = \frac{m-2}{m+1},\end{aligned}$$

となり、示すべき結果が得られた。（ここで $m \geq 3$ により $m-1 \geq 2$ が保証されるので、条件付き確率（conditional probability）が意味をもつ。）

検算

- 最も小さい場合：$m = n$ のとき、公式は $n = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ を与える。$m = n = 2$ のとき、1 と 2 の並べ方 6 通りは同様に確からしく、成功するのは 1122 と 1212 だけなので $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。✓
- m が大きい場合：3 つの確率はいずれも 1 に近づく。£1 硬貨が豊富にあるのだから、そうなるべきである。
- 列の順序をすべて数え上げると、$m = 5$ のとき $n = 1, 2, 3$ に対してそれぞれ $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ が得られ、$\frac{m}{m+1}, \frac{m-1}{m+1}, \frac{m-2}{m+1}$ と一致する。また、14 以下のすべての m について公式が厳密に成り立つことも確かめた。

よくある間違い

- 受け取った £2 硬貨は釣り銭として使えないことを忘れる。数に入るのは £1 硬貨だけである。
- 各人を、一定の確率 $\frac{m}{m+n}$ による独立な抽出として扱う。列は非復元抽出（without replacement）で作られるので、人を並べるにつれて確率は変化する。
- (iii) で、3 人の後に $c = 1$ であれば常に安全だと思い込み、1, 1, 2, 2, 2 や 1, 2, 1, 2, 2 という失敗を見落とす。

STEP のその先へ

一般に、$n \leq m$ であるすべての n に対して確率は $\frac{m+1-n}{m+1}$ となる。これは**投票問題**（ballot problem）であり、最もすっきりした証明は**鏡像原理**（reflection principle）を用いるものである。行き詰まりの水準に触れる経路を折り返すと、別の場所で終わる

経路が得られ、これによって悪い列の個数が一つの二項係数（binomial coefficient）に帰着する。$m = n$ のとき、良い列の個数はカタラン数（Catalan number）であり、これは組合せ論（combinatorics）のいたるところに現れる。ランダムウォーク（random walk）と鏡像原理については、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。