解答例

STEP I 2011、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP I 2011、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

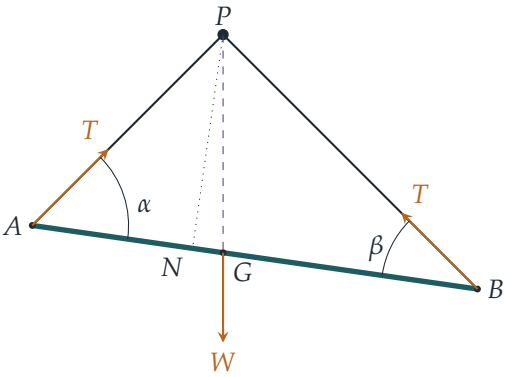
step.maths.org/questions/11-s1-q11

鍵となる考え方

棒にはたらく力は 3 つだけである。A と B における 2 つの糸の張力（tension）と、G における重力である。杭が滑らか（smooth）であるから 2 つの張力は等しく、したがって G のまわりのモーメント（moment）を考えれば（重力は G のまわりにモーメントをもたない）、角どうしの関係がただちに得られる。後半で追加で必要となる事実は、平衡（equilibrium）にある 3 つの力がすべて平行でないならば、それらは 1 点を通らなければならないということである。ここではその点が杭であるから、PG は鉛直である。

解答

棒を剛体の棒（rigid rod）、糸を軽く（light）伸びない（inextensible）ものとし、杭は滑らかであるとモデル化する。棒の重さを W とする。



$3\sin\alpha = 4\sin\beta$ であることの証明

糸は軽く、滑らかな杭にかけられているから、その張力 T は糸全体で等しい。したがって棒には、W が G において鉛直にはたらくほかに、A において AP の向きに大きさ T の力が、B において BP の向きに大きさ T の力がはたらく。

G のまわりのモーメントを考える。重力はモーメントをもたない。G から直線 AP までの距離は $AG\sin\alpha = 3d\sin\alpha$ であり、$GB = 7d - 3d = 4d$ であるから、G から直線 BP までの距離は $GB\sin\beta = 4d\sin\beta$ である。A における張力は棒を G のまわりに一方の向きに回し、B における張力は逆の向きに回すから、平衡のためには

$$T\cdot 3d\sin\alpha = T\cdot 4d\sin\beta \quad\Longrightarrow\quad 3\sin\alpha = 4\sin\beta,$$

が成り立つ（$Td \neq 0$ で割った）。これが示すべきことであった。

糸の長さ

$\cos\beta = \frac{4}{5}$ のとき $\sin\beta = \frac{3}{5}$ である（β は三角形の内角であるから $\sin\beta > 0$）。すると

$$\sin\alpha = \tfrac{4}{3}\sin\beta = \tfrac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5},$$

となる。ここで α は鋭角（acute）であるから正の根をとった。さらに

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = 0,$$

であり、$0 < \alpha+\beta < \pi$ であるから $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ である。したがって三角形 PAB は P を直角とする直角三角形で、斜辺（hypotenuse）は $AB = 7d$ である。よって

$$PA = 7d\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d, \qquad PB = 7d\cos\beta = \tfrac{28}{5}d,$$

であり、糸の長さは

$$PA + PB = \tfrac{49}{5}d.$$

である。

棒の傾き

考えてみよう 棒に対する P の位置はわかっている。では「鉛直」はどの向きか？

2 つの張力は P を通る直線に沿ってはたらくから、その合力も P を通ってはたらく。平衡のためにはこの合力が重力とつり合わなければならないので、合力は W と大きさが等しく向きが反対で、同じ直線上になければならない（平行でない 3 力が平衡にあ

るとき、それらは共点（concurrent）である）。よって G を通る鉛直線は P を通る。すなわち PG は鉛直である。

P から AB に下ろした垂線の足を N とする。直角三角形 PAN において

$$AN = PA\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{63}{25}d, \qquad PN = PA\sin\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{84}{25}d.$$

である。$AN = \frac{63}{25}d < 3d = AG$ であるから、点 N は A と G の間にあり、

$$NG = 3d - \tfrac{63}{25}d = \tfrac{12}{25}d.$$

である。直角三角形 PNG において

$$\tan\angle PGN = \frac{PN}{NG} = \frac{84}{12} = 7.$$

角 PGN は、棒と鉛直線 GP のなす角を A の側で測ったものである。これは鋭角であるから、端 A は G を通る水平線より上に、B はその下にあり、与えられた配置と一致する。棒と水平線のなす角 θ は $\frac{\pi}{2} - \angle PGN$ であるから

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\angle PGN} = \frac{1}{7}, \qquad \text{すなわち} \qquad \theta = \arctan\tfrac{1}{7},$$

となり、これが示すべきことであった。

検算

- 糸の長さ $\frac{49}{5}d = 9.8d$ は棒の長さ $7d$ より長く、三角形 PAB における三角不等式（triangle inequality）の要請を満たしている。
- 等しい 2 つの張力の合力はそれらのなす角を二等分するから、PG は角 APB を二等分する。角の二等分線定理（angle bisector theorem）により、$PA : PB$ は $AG : GB = 3 : 4$ に等しいはずであり、実際 $\frac{21}{5} : \frac{28}{5} = 3 : 4$ である。
- 数値的な検算として、P を A と B を焦点（foci）とする楕円（ellipse）上（この糸の長さに対して杭がとりうる位置の集合）におき、P から測った G の深さが停留（stationary）する傾きを探した。結果は 8.13° となり、$\arctan\frac{1}{7} \approx 8.130^\circ$ と一致した。

よくある間違い

- 糸の 2 つの部分に異なる張力を与えてしまう。滑らかな杭は軽い糸の張力を変えることはできない。
- 距離を取り違えて $4\sin\alpha = 3\sin\beta$ としてしまう。長いほうの腕 $GB = 4d$ は B における角と組になる。

- α が鋭角であることを忘れて $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ を許してしまう。そうすると別の三角形になり、そこでは $\alpha + \beta$ は直角にならない。

STEP のその先へ

糸の長さを固定すると、杭は A と B を焦点とする楕円上になければならない。すると PG が角 APB を二等分するという事実は、楕円の反射の性質、すなわち P における法線が 2 本の焦半径のなす角を二等分するという性質にほかならない。また、平衡の位置とはちょうど位置エネルギー（potential energy）が停留する位置であり、これは大学 1 年の講義における仮想仕事の原理（principle of virtual work）やラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点となる。平衡、トルク（torque）、エネルギーを用いる方法について学ぶには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。