解答例

STEP I 2011、第 10 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP I 2011、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q10

鍵となる考え方

2 つの質点はともに同じ点から静止状態で動き始め、放してから衝突するまでの間（自由落下と完全弾性的な跳ね返り）にエネルギーは一切失われない。したがって、どの高さにおいても 2 つの質点の速さは等しく、両者は同じ高さで出会う。その後の衝突は、運動量と $e = 1$ のニュートンの反発法則（Newton's law of restitution）という 2 つの式を用いる標準的な問題であり、B の最高点の高さは再びエネルギーから求まる。

解答

A と B を質点（particle）としてモデル化し、空気抵抗を無視し、全体を通して上向きを正とする。

速さが等しい理由

各質点は高さ h から静止状態で動き始める。自由飛行中に働く力は重力のみなので、力学的エネルギー（mechanical energy）は保存される。また、A の平面での跳ね返りは完全弾性的（perfectly elastic）なので、A の速度の向きを逆にするだけで速さは変えず、ここでもエネルギーは失われない。よって、最初の衝突までは各質点の単位質量あたりの全エネルギーは gh であり、高さ y にある質点の速さ v は次を満たす。

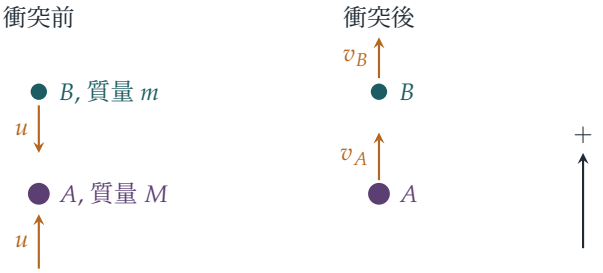
$$\tfrac{1}{2}v^2 + gy = gh, \qquad \text{よって} \qquad v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

速さは高さだけで決まり、質量や質点のそれまでの経緯にはよらない。最初の衝突の瞬間、2 つの質点は同じ高さ y にあるので、速さは等しい。さらに、A はまだ P に戻っていないので $y < h$ であり、この共通の速さ $u = \sqrt{2g(h-y)}$ は正である。A は跳

ね返った後なので上向きに動いており、B（一度も跳ね返っていない）は下向きに動いている。

衝突

衝突の直前、A の速度は $+u$、B の速度は $-u$ である。衝突直後のそれぞれの速度を v_A、v_B とする。



衝突における撃力（impulsive force）は 2 つの質点の間の内力であり、衝突の一瞬の間に重力が与える力積（impulse）はないので、運動量（momentum）は保存される。

$$Mu - mu = Mv_A + mv_B. \tag{1}$$

衝突は完全弾性的（$e = 1$）なので、遠ざかる速さは近づく速さに等しい。

$$v_B - v_A = u - (-u) = 2u. \tag{2}$$

(2) から得られる $v_B = v_A + 2u$ を (1) に代入すると

$$(M-m)u = (M+m)v_A + 2mu \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{(M-3m)u}{M+m},$$

となり、さらに

$$v_B = v_A + 2u = \frac{(M-3m)u + 2(M+m)u}{M+m} = \frac{(3M-m)u}{M+m}.$$

$M > 3m$ より $M - 3m > 0$ なので $v_A > 0$ であり、$v_B = v_A + 2u > 0$ も成り立つ。よって、題意のとおり、最初の衝突の後は 2 つの質点はともに上向きに動く。

考えてみよう B が次に A と出会う前に、実際に飛行の最高点に達することはどうしてわかるだろうか？

衝突後、2 つの質点の加速度はともに $-g$ なので、両方が飛行している間は相対速度（relative velocity）は $v_B - v_A = 2u$ のまま一定である。つまり B は一定の割合で A から離れていき、A が次に平面に当たるまでは両者は出会えない。B がまだ上昇してい

る間に A が跳ね返った場合は、単位質量あたりのエネルギーを比べる。B のエネルギーは $\frac{1}{2}v_B^2 + gy$、A のエネルギーは $\frac{1}{2}v_A^2 + gy$ であり、$v_B > v_A > 0$ なので後者の方が小さい（そして A の跳ね返りはエネルギーを保つ）。したがって、同じ高さにあるときは常に、A の速さは B の速さより小さい。B がまだ上昇している間に下から B に追いつくには、出会う瞬間に A が B 以上の速さで上昇していなければならないが、今見たようにそれは不可能である。よって 2 回目の衝突は B が最高点を通過した後にしか起こらず、その最高点こそが求める最大値である。

B の最高点の高さ

衝突は $u^2 = 2g(h-y)$ を満たす高さ y で起こる。すなわち

$$y = h - \frac{u^2}{2g}.$$

衝突後、B は初速 v_B で重力のみを受けて上昇するので、さらに $v_B^2/(2g)$ だけ上る（$v = 0$ として $v^2 = v_B^2 - 2gs$ から）。したがって最高点の高さは

$$\begin{aligned} y + \frac{v_B^2}{2g} &= h - \frac{u^2}{2g} + \frac{(3M-m)^2u^2}{2g(M+m)^2} \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}\left[(3M-m)^2 - (M+m)^2\right] \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}(2M-2m)(4M) \\ &= h + \frac{4M(M-m)u^2}{(M+m)^2 g}, \end{aligned}$$

となる。ここで 3 行目では 2 乗の差の因数分解（difference of two squares）を用いた。これが求める結果である。

検算

- エネルギー：v_A と v_B を上のとおりとすると $Mv_A^2 + mv_B^2 = (M+m)u^2$ となり、弾性衝突で要求されるとおりである。
- 極限の場合：$m \to 0$ とすると $v_A \to u$、$v_B \to 3u$ となり（非常に軽い球は、動く壁から跳ね返るように重い球から跳ね返り、それに対して相対速度 $2u$ で離れていく）、高さは $h + 4u^2/g$ となって、$y + 9u^2/(2g)$ と一致する。
- $M > m$ なので、追加の高さは正である。B は A からエネルギーを得て、当然ながら P より上に達する。
- 数値的にも確かめた。B を放す時刻、h、$M > 3m$ を満たす質量をランダムに選

び、（A のその後の跳ね返りも含めて）2 回目の衝突まで運動を数値的に追跡したところ、B の最高点の高さは公式と相対誤差約 10^{-10} で一致した。

よくある間違い

- 符号の誤り：衝突前の速度を両方とも $+u$ とすると、A が上昇している間に B が落下していることを見落とすことになる。
- 追加の上昇距離 $v_B^2/(2g)$ を、衝突の高さ $h - u^2/(2g)$ からではなく、平面や P から測ってしまう。

STEP のその先へ

速さが高さだけで決まるという議論は、保存力（conservative force）に対するエネルギー保存則である。ある点での速さはその点での位置エネルギー（potential energy）だけで決まり、たどった経路にはよらない。衝突そのものは重心系（centre-of-mass frame）で考えるのが最も簡単なことが多い。重心系では弾性衝突は各質点の速度の向きを逆にするだけであり、元の座標系に戻せば v_A と v_B が 1 行で得られる。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これら 2 つの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。