解答例

# STEP I 2011、第 1 問

純粋数学 • 陰関数の微分

> **STEP I 2011、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q1

## 鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を使えば、$y$ について解かなくても各曲線の傾き（gradient）が求まる。そのあとは、どの小問も交点 $(p,q)$ における条件を書き下すだけである。すなわち、その点は直線上にあり、曲線上にあり、そして両者の傾きの間に関係がある（接する（touching）場合は等しく、法線（normal）の場合は積が $-1$ である）。傾きの条件から $p$ と $q$ の間の簡単な関係が得られ、それを残りの二つの式に代入すると $p$ が二通りの方法で定まり、それらが一致しなければならない。

## 解答

**小問 (i)**

$y$ を $x$ の関数とみなして、$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$ を $x$ で微分すると

$$-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

$b\neq 0$ であるから、整理して

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{ay^2}{bx^2},$$

を得る。これが示すべきことであった。（方程式に $a/x$ と $b/y$ が含まれるので、曲線上のどの点でも $x$ と $y$ はともに 0 でない。）

**傾きが等しい場合。**直線 $ax+by=1$ の傾きは $-\frac{a}{b}$ である。点 $(p,q)$ における曲線の傾

きは $-\dfrac{aq^2}{bp^2}$ であるから

$$-\frac{aq^2}{bp^2} = -\frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{q^2}{p^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = p^2,$$

となる。ここで $a/b$ を約したが、$a \neq 0$ であるからこれは許される。したがって $p = \pm q$ である。

**二つの場合**。点 $(p, q)$ はさらに

$$ap + bq = 1 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = 1.$$

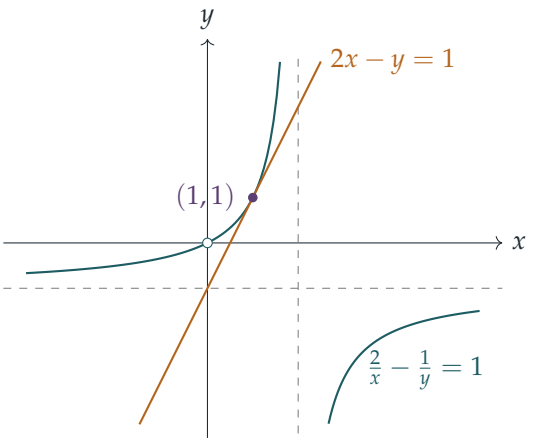
を満たす。

- $q = p$ のとき：直線の式から $p(a+b) = 1$ となるので $p = \dfrac{1}{a+b}$ である（特に $a + b \neq 0$）。曲線の式から $\dfrac{a+b}{p} = 1$ となるので $p = a + b$ である。両者を比べると $a + b = \dfrac{1}{a+b}$、すなわち $(a+b)^2 = 1$ である。
- $q = -p$ のとき：直線の式から $p(a-b) = 1$ となるので $p = \dfrac{1}{a-b}$ である。曲線の式から $\dfrac{a-b}{p} = 1$ となるので $p = a - b$ である。両者を比べると $(a-b)^2 = 1$ である。

よって $(a-b)^2 = 1$ または $(a+b)^2 = 1$ であり、示すべきことが示された。

**考えてみよう** このような点は本当に存在するのだろうか。それとも必要条件（necessary condition）を求めただけなのだろうか。

実際に存在する。$a = 2$、$b = -1$ とすると $a + b = 1$ である。点 $(1, 1)$ は直線 $2x - y = 1$ 上にも曲線 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1$ 上にもあり、そこでの傾きはどちらも 2 である。この場合、曲線は $y = \dfrac{x}{2-x}$ であり、原点を除いた直角双曲線（rectangular hyperbola）である。共有点で傾きが等しいということは、直線が接線（tangent）であることを意味する：




白丸は原点を表す。原点は双曲線 $y = \frac{x}{2-x}$ 上にはあるが、曲線そのものの上にはない。

**小問 (ii)**

$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 1$ を陰関数微分すると

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ay^2}{bx^2}.$$

直線が点 $(p, q)$ で曲線の法線になっているとする。このとき $p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ であり、

$$ap + bq = 1 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 1.$$

が成り立つ。$a$、$b$、$p$、$q$ はすべて 0 でないので、接線の傾き $\frac{aq^2}{bp^2}$ と直線の傾き $-\frac{a}{b}$ はともに有限かつ 0 でない。よって「法線である」とは、それらの積が $-1$ であることを意味する：

$$\frac{aq^2}{bp^2} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \Longrightarrow \quad a^2q^2 = b^2p^2 \quad \Longrightarrow \quad aq = \pm bp.$$

**考えてみよう** どちらの符号がありうるだろうか。

それぞれの符号を曲線の方程式で確かめる。

- $aq = bp$ ならば $\frac{b}{q} = \frac{a}{p}$ であるから、$\frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 0 \neq 1$ となる。この符号はありえない。
- $aq = -bp$ ならば $\frac{b}{q} = -\frac{a}{p}$ であるから、曲線の方程式は $\frac{2a}{p} = 1$ となり、$p = 2a$、さらに $q = -\frac{bp}{a} = -2b$ を得る。

$p = 2a$、$q = -2b$ を直線の方程式に代入すると

$$2a^2 - 2b^2 = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad a^2 - b^2 = \tfrac{1}{2},$$

となり、示すべきことが示された。法線の足は点 $(2a, -2b)$ である。

## 検算

- 小問 (i) について、上の例 $a = 2$、$b = -1$ では $(a+b)^2 = 1$ であり、直線は $(1,1) = (p,p)$ で接する。同様に $a = 2$、$b = 1$ では $(a-b)^2 = 1$ であり、直線 $2x + y = 1$ は $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ に $(1,-1)$ で接する。
- 小問 (ii) について、$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$b = \frac{1}{2}$ とすると $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$ であり、点は $(2a, -2b) = (\sqrt{3}, -1)$ である。直線の式は $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$、曲線の式は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ となる。そこでの接線の傾きは $\dfrac{aq^2}{bp^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$、直線の傾きは $-\sqrt{3} \approx -1.732$ であり、積は $-1$ である。
- 数値的にも、傾きの公式は数百個のランダムな点で有限差分（finite difference）による傾きと一致し、$(a,b)$ をランダムに探索すると、法線が見つかるのは $a^2 - b^2$ が丸め誤差の範囲で 0.5 に等しいときだけである。

## よくある間違い

- 小問 (i) で $q = -p$ の場合を落とすこと：$(a-b)^2 = 1$ を与えるのはこの場合である。
- 小問 (ii) で $aq = \pm bp$ で止めてしまい、曲線がどちらの符号を許すかを確かめないこと。

## STEP のその先へ

陰関数微分は、陰関数定理（implicit function theorem）の最初の姿である。すなわち、$\partial F/\partial y \neq 0$ となる任意の点の近くで、方程式 $F(x,y) = 0$ は $y$ を $x$ の微分可能な関数として定め、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -F_x/F_y$ が成り立つ。ここでの接することに関する議論には代数的な対応物もある。直線が二次曲線（conic）に接するのは、交点を求める二次方程式が重根（repeated root）をもつときであり、かつそのときに限る。この方法で小問 (i) を導き直すこともできる。これらすべての背後にある解析学（analysis）については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。