解答例

STEP III 2010、第 9 問

力学 ・ 円周上の運動

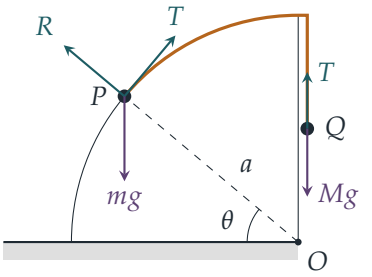
> **STEP III 2010、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q9

鍵となる考え方

糸は伸びず（inextensible）、台は滑らか（smooth）なので、P と Q は常に同じ速さで動き、系全体でエネルギーが保存される（conservation of energy）。これにより、微分方程式を解くことなく、P の速さが θ の関数として得られる。次に、P は円周上を動くので、O に向かう方向に力を分解すれば垂直抗力（normal reaction）が求まる。接触を保つとは、この抗力が負にならないことであり、上に凸であることを用いた議論（concavity）により、台の最上点だけを調べれば十分であることがわかる。

解答

モデル。 P と Q は質点、糸は軽くて伸びず、台は滑らかなので、張力（tension）T は糸のどこでも等しい。P を円弧上の角 θ の位置に置く。糸は P から円弧に沿って台の最上点まで伸び、そこから鉛直な面に沿ってまっすぐ下り、Q に至る。



速さ。 P が $\theta = 0$ から θ まで動いたとき、進んだ弧の長さは $a\theta$ であるから、Q は距離 $a\theta$ だけ下降している。両者はともに速さ $v = a\dot{\theta}$ で動く。一方、P は高さ $a\sin\theta$ だけ上昇している。台は滑らかで、糸は（伸びないので）系に対して正味の仕事をしないから、エネルギーは保存される。静止状態から動き始めるので、

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v^2 = Mga\theta - mga\sin\theta, \qquad \text{よって} \qquad v^2 = \frac{2ga\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

$0 < \theta \le \frac{1}{2}\pi$ では $M\theta > m\theta \ge m\sin\theta$ であるから、これは正である。したがって、系は確かに静止状態から動き出す。

垂直抗力。 P は O を中心とする半径 a の円周上を動くので、O に向かう加速度は v^2/a である。P にはたらく力は次のとおりである。

- 抗力 R。OP に沿って、O から遠ざかる向きにはたらく。
- 張力 T。接線方向にはたらき、動径方向の成分をもたない。
- 重力 mg。OP は水平方向と角 θ をなすので、その O に向かう成分は $mg\sin\theta$ である。

O に向かう方向に分解すると、

$$mg\sin\theta - R = \frac{mv^2}{a} = \frac{2mg\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

したがって

$$R = \frac{mg\big[(m+M)\sin\theta - 2M\theta + 2m\sin\theta\big]}{m+M}$$
$$= \boxed{\frac{mg\big[(3m+M)\sin\theta - 2M\theta\big]}{m+M}.}$$

考えてみよう $[0, \frac{1}{2}\pi]$ のすべての θ に対して、R は負であってはならない。R の最小値を探す必要があるだろうか？

条件。 P が接触を保つのは、常に $R \ge 0$ であるとき、すなわち

$$f(\theta) = (3m+M)\sin\theta - 2M\theta \ge 0 \quad \text{ただし} 0 \le \theta \le \tfrac{1}{2}\pi.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。最小値を求める必要はない。この区間で $f''(\theta) = -(3m+M)\sin\theta \le 0$ であるから f は上に凸であり、そのグラフは両端点を結ぶ弦（chord）の上側または弦上にある。$f(0) = 0$ であるから、次のことがいえる。

- **必要性。** P が $\theta = \frac{1}{2}\pi$ でまだ接触しているならば、$f(\frac{1}{2}\pi) = 3m + M - \pi M \geq 0$ である。
- **十分性。** $f(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$ ならば、$(0,0)$ から $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi))$ への弦は軸の上側または軸上にある。上に凸であることから f は弦の上側または弦上にあるので、区間全体で $f \geq 0$ である。

よって条件は $3m \geq (\pi - 1)M$、すなわち

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\pi - 1}{3},$$

となり、これが示すべきことであった。$(\pi - 1)/3 \approx 0.714 < 1$ であるから、これは $m < M$ と矛盾しないことに注意する。

検算

- $\theta = 0$ では $R = 0$ となる。これは正しい。始めに P は台の下端にあり、半径 OP は水平で、P の重さは机が支えているからである。
- P について接線方向に、Q について鉛直方向に力を分解すると $T = \dfrac{Mmg(1+\cos\theta)}{m+M} > 0$ となるので、糸は全過程を通じて確かに張っている。
- 数値的には、$m = 0.8$、$M = 1$、$a = 1$（比は $0.8 > 0.714$）として運動方程式を刻み幅ごとに解き、ニュートン（Newton）の第 2 法則から R を計算すると、公式と 10^{-13} の精度で一致し、R は負にならない。$m/M = \frac{2}{3}$ のときは、最上点付近で R が負になる。

よくある間違い

- Q も運動エネルギーをもつことを忘れ、$\frac{1}{2}(m+M)v^2$ ではなく $\frac{1}{2}mv^2$ と書いてしまう。
- 動径方向の方程式に張力を入れてしまう。滑らかな面上では、糸は P における接線に沿っている。
- $\theta = \frac{1}{2}\pi$ でのみ $R \geq 0$ を確かめ、それで十分である理由を示さない。それで十分といえるのは、f が上に凸だからである。

STEP のその先へ

ここでは、運動方程式 $(m+M)a\ddot{\theta} = g(M - m\cos\theta)$ を解く代わりにエネルギー保存を用いた。これは第一積分（first integral）の考え方であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）で中心的な役割を果たす。糸は拘束（constraint）であり、ただ一つの座標 θ で系全体が記述される。球面から離れる小球の問題群（この問題もその一つである）は、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics* で丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。