解答例

STEP III 2010、第 8 問

純粋数学 • 商の微分法と積分

> **STEP III 2010、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q8

鍵となる考え方

式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ は、商 R/Q を微分したときに現れる分子である。したがって、与えられた P を生み出す R を見つけることさえできれば、P/Q^2 の形の被積分関数（integrand）は一目で積分できる。どちらの小問でも分母から Q がわかり、係数比較（comparing coefficients）によって R を求める。小問 (ii) では、微分方程式（differential equation）の左辺がちょうど $\mathrm{Q}y' - \mathrm{Q}'y$ になっていることがわかる。これは同じ構造が姿を変えて現れたものである。

解答

一般の積分

商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) = \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{R}'(x) - \mathrm{Q}'(x)\mathrm{R}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2},$$

であるから、

$$\int \frac{\mathrm{P}(x)}{(\mathrm{Q}(x))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} + C.$$

小問 (i)

ここでは $\mathrm{Q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$ であるから、$\mathrm{Q}'(x) = 2 + 6x$ である。$\mathrm{R}(x) = a + bx + cx^2$、$\mathrm{R}'(x) = b + 2cx$ とおくと、

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= (1 + 2x + 3x^2)(b + 2cx) - (2 + 6x)(a + bx + cx^2) \\ &= (b - 2a) + (2c - 6a)x + (2c - 3b)x^2.\end{aligned}$$

（x^3 の項は、どちらの積からも $6cx^3$ が出て打ち消し合う。）これが $5x^2 - 4x - 3$ に等しくなる必要があるので、

$$b - 2a = -3, \qquad 2c - 6a = -4, \qquad 2c - 3b = 5.$$

はじめの 2 式から $b = 2a - 3$、$c = 3a - 2$ を得る。これを 3 番目の式に代入すると、

$$2(3a - 2) - 3(2a - 3) = 6a - 4 - 6a + 9 = 5,$$

となり、これは a が**どんな値であっても**成り立つ。したがって 3 番目の式は新しい情報を何も与えず、a のすべての値が条件を満たす：

$$\mathrm{R}(x) = a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2.$$

$a = 1$ とおくと最もすっきりした $\mathrm{R}(x) = 1 - x + x^2$ が得られ、よって

$$\int \frac{5x^2 - 4x - 3}{(1 + 2x + 3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} + C.$$

分母は決して 0 にならない（判別式（discriminant）が $4 - 12 < 0$ である）ので、これはすべての実数 x に対して成り立つ。

一意でないこと。 いま見たように、条件を満たす R は 1 パラメータの族をなすので、選び方は一意（unique）ではない。たとえば $a = 0$ とすると $\mathrm{R} = -3x - 2x^2$、$a = 1$ とすると $\mathrm{R} = 1 - x + x^2$ が得られ、どちらも条件を満たす。一般の a に対する選び方と $a = 0$ の場合とを比べると、

$$(a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2) - (-3x - 2x^2) = a + 2ax + 3ax^2 = a\,\mathrm{Q}(x).$$

考えてみよう R に Q の定数倍を加えても違いが生じないのはなぜか？

定数 k に対して R を $\mathrm{R} + k\mathrm{Q}$ に置き換えると、

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R} + k\mathrm{Q})' - \mathrm{Q}'(\mathrm{R} + k\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} + k(\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R},$$

となるので、P は変わらない。これに対応して、答え R/Q は $\mathrm{R}/\mathrm{Q} + k$ に変わる。つまり、R の選び方が異なっても、得られる原始関数（antiderivative）は定数だけしか違わず、その定数は任意の積分定数（constant of integration）に吸収される。たとえば、

$$\frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} = \frac{-3x - 2x^2}{1 + 2x + 3x^2} + 1.$$

小問 (ii)

$\mathrm{Q}(x) = 1 + \cos x + 2\sin x$ とおく。すると $\mathrm{Q}'(x) = -\sin x + 2\cos x$ であるから、方程式における y の係数 $\sin x - 2\cos x$ はちょうど $-\mathrm{Q}'(x)$ である。したがって方程式は

$$\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Q}'y = 5 - 3\cos x + 4\sin x.$$

となる。$\mathrm{Q} \neq 0$ である任意の区間で Q^2 で割ると、左辺が商の導関数であることがわかる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right) = \frac{5 - 3\cos x + 4\sin x}{\mathrm{Q}^2}.$$

（言い換えると、$1/\mathrm{Q}^2$ は積分因子（integrating factor）である。）右辺を積分するために、$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = 5 - 3\cos x + 4\sin x$ を満たす R を探す。Q の形にならって $\mathrm{R} = a + b\cos x + c\sin x$ とおいてみると、$\mathrm{R}' = -b\sin x + c\cos x$ である。展開すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' &= -b\sin x + c\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + c\cos^2 x - 2b\sin^2 x,\\ \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= -a\sin x + 2a\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + 2b\cos^2 x - c\sin^2 x.\end{aligned}$$

引き算すると $\sin x\cos x$ の項は打ち消し合い、2 乗の項はまとめて $(c - 2b)(\cos^2 x + \sin^2 x) = c - 2b$ となる。よって

$$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = (c - 2b) + (c - 2a)\cos x + (a - b)\sin x.$$

これを $5 - 3\cos x + 4\sin x$ と比較すると、

$$c - 2b = 5, \qquad c - 2a = -3, \qquad a - b = 4.$$

1 番目の式から 2 番目の式を引くと $2a - 2b = 8$ となり、これは再び 3 番目の式である。したがって小問 (i) と同様に、同じ理由で自由なパラメータが 1 つ残る。$b = 0$ とおくと $c = 5$、$a = 4$ となり、$\mathrm{R} = 4 + 5\sin x$ である。ゆえに

$$\frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{4 + 5\sin x}{1 + \cos x + 2\sin x} + C,$$

であり、一般解（general solution）は

$$y = 4 + 5\sin x + C(1 + \cos x + 2\sin x),$$

である。ただし C は任意定数である。これを求める際には Q で割ったが、直接代入して確かめられるとおり、この関数はすべての x に対して方程式を満たす。b を別の値に選んでも C がずれるだけである。たとえば $b = -2$ とすると $\mathrm{R} = 2 - 2\cos x + \sin x = (4 + 5\sin x) - 2\mathrm{Q}$ となる。

検算

- 小問 (i) において、被積分関数の $\int_0^1$ は、求めた原始関数から $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$ となるはずである。シンプソンの公式（Simpson's rule）では $-0.83333\ldots$ が得られ、a をどう選んでも、ランダムにとった区間で一致する。
- 小問 (ii) において、$y = 4 + 5\sin x$ を代入すると、左辺は $(1 + \cos x + 2\sin x)5\cos x - (2\cos x - \sin x)(4 + 5\sin x) = 5 - 3\cos x + 4\sin x$ となる。また $y = \mathrm{Q}$ とすると $\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q} = 0$ となり、これが余関数（complementary function）である。
- 方程式を $y(0.5) = 1.7$ から $x = 1.5$ まで数値的に（ルンゲ・クッタ法（Runge–Kutta）で）解くと 3.910638 が得られ、対応する C をとった公式の値と一致する。

よくある間違い

- 3 つの未知数に関する 3 つの方程式には一意な解があると思い込むこと。ここではそれらは独立でなく、まさにそれこそが一意性に関する問いの核心である。
- 小問 (ii) で Q' の符号を間違えること。$\mathrm{Q}' = 2\cos x - \sin x$ であるから、y の係数は $+\mathrm{Q}'$ ではなく $-\mathrm{Q}'$ である。
- 最終的な答えにおいて、積分定数が Q に掛かることを忘れること。一般解は $y = \mathrm{R} + C$ ではなく $y = \mathrm{R} + C\mathrm{Q}$ である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の方程式は 1 階線形微分方程式（first-order linear differential equation）であり、その一般解は「特殊解（particular solution）＋同次方程式（homogeneous equation）の解の定数倍」という形をしている。これはあらゆる線形の問題に通じるパターンである。式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ は Q と R のロンスキアン（Wronskian）であり、2 階線形方程式において中心的な役割を果たす。とくに階数低下法（reduction of order）や定数変化法（variation of parameters）で重要である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、積分因子とロンスキアンの両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。