解答例

STEP III 2010、第 7 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 2010、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q7

鍵となる考え方

すべてがうまくいくのは、扱いにくい平方根を片付けることができるからである。$\sqrt{1-x^2}\,y'$ を一つのすっきりした式として書き、もう一度微分すると、2 階の微分方程式（second-order differential equation）が自然に得られる。その後は、微分を繰り返すと係数に規則性が現れ、それを数学的帰納法（induction）で証明する。一般の関係式に $x=0$ を代入すると、それはマクローリン係数（Maclaurin coefficients）に関する漸化式（recurrence relation）になり、m が偶数のときはその漸化式に 0 となる因子が現れるので、級数は途中で終わる。

解答

微分方程式

$\theta = \arcsin x$ とおく。すると $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ のもとで $\sin\theta = x$ であり、$|x| < 1$ に対して $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$ である。このとき $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ かつ $y = \cos m\theta$ であるから、合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\sin m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{すなわち} \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\sin m\theta.$$

これを x で微分する。左辺には積の微分法（product rule）を用いると

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m^2\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{m^2 y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

両辺に $\sqrt{1-x^2}$（これは 0 でない）を掛けると

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2 y = 0,$$

となり、示すべき式が得られた。（ここおよび以下では、$y^{(n)}$ は $\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$ を表す。）

3 階および 4 階の方程式

いま証明した方程式を微分する。積 $(1-x^2)y''$ からは $(1-x^2)y'''-2xy''$ が、xy' からは $xy''+y'$ が得られるので

$$(1-x^2)\,y'''-3x\,y''+(m^2-1)\,y'=0.$$

同様にもう一度微分すると

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-2x\,y'''-3x\,y'''-3y''+(m^2-1)\,y''=0,$$

したがって

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-5x\,y'''+(m^2-4)\,y''=0.$$

一般の関係式

x の係数は 1,3,5 と進み、定数項は m^2-0^2, m^2-1^2, m^2-2^2 と進むので、すべての整数 $n\geq 0$ に対して

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0. \qquad (*)$$

が成り立つと予想される。これを n に関する数学的帰納法で証明する。$n=0$ の場合は最初に証明した方程式である。ある n について $(*)$ が成り立つと仮定する。これを微分すると

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,y^{(n+3)}-2x\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+2)}\\ -(2n+1)\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n+1)}=0.\end{aligned}$$

項をまとめると、$x\,y^{(n+2)}$ の係数は $-(2n+3)=-(2(n+1)+1)$ であり、$y^{(n+1)}$ の係数は $m^2-(n^2+2n+1)=m^2-(n+1)^2$ である。よって

$$(1-x^2)\,y^{(n+3)}-(2(n+1)+1)x\,y^{(n+2)}+(m^2-(n+1)^2)y^{(n+1)}=0,$$

となり、これは $(*)$ の n を $n+1$ に置き換えたものである。数学的帰納法により、$(*)$ はすべての $n\geq 0$ について成り立つ。

マクローリン級数

$x=0$ のとき $\theta=0$ であるから、$y(0)=\cos 0=1$ かつ $y'(0)=-m\sin 0=0$ である。$(*)$ に $x=0$ を代入すると中央の項が消える：

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)\,y^{(n)}(0).$$

$y'(0) = 0$ であるから、奇数階の導関数はすべて 0 において 0 となる。偶数階については

$$\begin{aligned} y''(0) &= (0 - m^2) \cdot 1 = -m^2, \\ y^{(4)}(0) &= (2^2 - m^2)(-m^2) = m^2(m^2 - 2^2), \\ y^{(6)}(0) &= (4^2 - m^2)\, m^2(m^2 - 2^2) = -m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2), \end{aligned}$$

であり、一般に $y^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2) \cdots (m^2 - (2k-2)^2)$ である。したがってマクローリン級数は

$$y = 1 - \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2 - 2^2)\, x^4}{4!} - \frac{m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)\, x^6}{6!} + \cdots,$$

であり、0 でない最初の 3 項は $1 - \dfrac{m^2 x^2}{2!} + \dfrac{m^2(m^2 - 2^2) x^4}{4!}$ である。($m \neq 0, \pm 2$ であれば、これらはすべて 0 でない。これらの値に対しては級数の項はもっと少なくなる。その理由は次の小問で説明する。)

m が偶数の場合

m を偶数の整数とし、$|m| = 2p$ とおく。因子 $m^2 - (2p)^2$ は 0 であり、$2k - 2 \geq 2p$ となるとすぐに $y^{(2k)}(0)$ に現れる。したがって、$|m|$ より大きい階数の導関数はすべて $x = 0$ において 0 となり、マクローリン級数は $x^{|m|}$ の項で終わる。

考えてみよう $x = 0$ で途中で終わる級数は、1 点における導関数について教えてくれるだけである。すべての $|x| < 1$ に対して y が本当にこの多項式に等しいことは、どうしてわかるのだろうか。

ここで再び $(*)$ を、今度は区間全体で用いる。$n = |m|$ とすると $m^2 - n^2 = 0$ となる。さらに $v = y^{(n+1)}$ とおく。すると $(*)$ は

$$(1 - x^2)\, v' - (2n + 1)\, x\, v = 0 \qquad (|x| < 1).$$

となる。この 1 階の方程式は積分因子（integrating factor）$(1 - x^2)^{(2n-1)/2}$ をもつ。実際

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1 - x^2)^{(2n+1)/2}\, v\Big] = (1 - x^2)^{(2n-1)/2}\Big[(1 - x^2)\, v' - (2n + 1)\, x\, v\Big] = 0,$$

であるから、$(1 - x^2)^{(2n+1)/2}\, v$ は $(-1, 1)$ 上で定数である。$x = 0$ におけるその値は、$n + 1$ が奇数であるから $v(0) = y^{(n+1)}(0) = 0$ である。よって $v \equiv 0$、すなわちすべての $|x| < 1$ に対して $y^{(|m|+1)}(x) = 0$ であり、したがって y は次数が高々 $|m|$ の多項式（polynomial）である。多項式はそれ自身のマクローリン級数に等しいので、$|x| < 1$ に対して

$$\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2 - 2^2)\, x^4}{4!} - \cdots,$$

が成り立つ。ここで右辺は上で求めた有限で終わる級数である。

次に $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ とし、$x = \sin\theta$ とおく。すると $|x| < 1$ であり、$\arcsin(\sin\theta) = \theta$ である（θ に対する制限が使われるのはまさにここである）。したがって

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2 \sin^2\theta}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\sin^4\theta}{4!} - \cdots,$$

となり、これは示すべき形で始まる $\sin\theta$ の多項式である。

最後に、$\sin^{|m|}\theta$ の係数は $y^{(|m|)}(0)/|m|!$ であり、これは $\pm m^2(m^2-2^2)\cdots(m^2-(|m|-2)^2)/|m|!$ に等しい。$2j \le |m|-2$ に対して $(2j)^2 < m^2$ であるから、これらの因子はどれも 0 でない。よって $m \neq 0$ のとき、この多項式の次数はちょうど $|m|$ である（すなわち、m が正の偶数のときは次数 m である）。$m = 0$ のときは定数 1 である。

検算

- $m = 2$：級数から $1 - 2\sin^2\theta$ が得られ、これはおなじみの $\cos 2\theta$ である。
- $m = 4$：級数から $1 - 8\sin^2\theta + \frac{16\cdot 12}{24}\sin^4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$ が得られる。直接計算すると $\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$ である。両者は一致する。
- 各点のまわりでの $\cos(m\arcsin x)$ のテイラー展開（Taylor expansion）を用いて、ランダムに選んだ 200 組の (m, x) において $n = 0, \ldots, 8$ に対する $(*)$ を数値的に確かめた（最大の相対残差はおよそ 10^{-13}）。また、12 までのすべての偶数 m について $\cos m\theta$ を多項式と照合した。たとえば $m = 6$、$\theta = 1$ のとき、両辺はともに 0.96017 に等しい。

よくある間違い

- $(1-x^2)y^{(n+2)}$ を微分するとき、積の微分法から出てくる $-2x\,y^{(n+2)}$ の項を忘れること。$2n+1$ を $2n+3$ に変えるのはこの項である。
- 途中で終わるマクローリン級数は関数に等しいはずだと思い込むこと。ここでは実際に等しいが、そのためには $v = y^{(|m|+1)}$ を用いた議論（あるいは別の正当化）が必要である。
- 次数を $m/2$ と答えること。多項式は $\sin\theta$ の偶数乗しか含まないが、最高次の冪は $\sin^m\theta$ である。

STEP のその先へ

代わりに $x = \cos\phi$ と置換すると、同じ種類の方程式はチェビシェフ（Chebyshev）の微分方程式 $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ になる。その多項式解 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ はチェビシェフ多項式であり、数値近似において中心的な役割を果たす。微分した方程式に $x = 0$ を代入して係数の漸化式を得るという今回の工夫は、線形常微分方程式（ODE）に対する**冪級数法**（power series method）の出発点である。この方法では、特別なパラメータの値に対して級数が途中で終わることから、ルジャンドル（Legendre）多項式、エルミート（Hermite）多項式、チェビシェフ多項式がすべて現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）には、級数解についてのわかりやすい章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。