解答例

STEP III 2010、第 6 問

純粋数学 • 3 次元の回転

> **STEP III 2010、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q6

鍵となる考え方

ある軸のまわりの回転（rotation）は、軸上のすべての点をそのままにし、軸に垂直な平面内のすべてのものを、ちょうどその平面の回転と同じように回す。したがって各段階は 2 次元の回転に帰着する。すなわち、回される平面を見つけ、その平面内の正規直交（orthonormal）なベクトルの組を書き下し、それらを回転させればよい。軸方向のベクトルは単にそのまま残る。この一つの観察が、Q についての議論の大部分を担う。

解答

座標軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と書く。すると P_0、Q_0、R_0 の位置ベクトルはそれぞれ $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ である。

小問 (i)

z 軸のまわりの回転は、x-y 平面を ϕ だけ回し、$\mathbf{i}$ は $\mathbf{j}$ の方へ動く。よって

$$P_1 = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0).$$

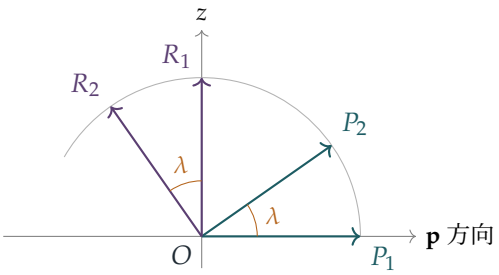
後のために述べておくと、この平面内で Q は常に P より直角だけ先にあるので、同じ回転によって $\mathbf{j}$ は $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ に移る。また R_0 は軸上にあるので動かない：$R_1 = (0, 0, 1)$。

小問 (ii)

$\mathbf{p} = \overrightarrow{OP_1} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ とおく。x-y 平面内で OP_1 に垂直な直線の方向は

$$\mathbf{u} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0),$$

である。実際 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} = 0$ かつ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k} = 0$ である。この軸に垂直な平面は正規直交な組 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{k}$ が張る平面であり、2 回目の回転はこの平面を λ だけ回し、$\mathbf{p}$ は $\mathbf{k}$ の方へ動く：



この平面内で回転は

$$\mathbf{p} \mapsto \cos\lambda\,\mathbf{p} + \sin\lambda\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \mapsto -\sin\lambda\,\mathbf{p} + \cos\lambda\,\mathbf{k},$$

と写す。2 つ目は、$\mathbf{k}$ が常に $\mathbf{p}$ より直角だけ先にあることによる。したがって

$$P_2 = (\cos\lambda\cos\phi,\ \cos\lambda\sin\phi,\ \sin\lambda), \qquad R_2 = (-\sin\lambda\cos\phi,\ -\sin\lambda\sin\phi,\ \cos\lambda).$$

考えてみよう 2 回目の回転で Q はどこへ行くか。

1 回目の回転の後、Q は $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ にあり、これはちょうど $\mathbf{u}$ である。つまり Q は 2 回目の回転の軸上にあるので動かない。よって

$$Q_2 = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0).$$

検算として、P_2、Q_2、R_2 は互いに垂直な単位ベクトルである（たとえば $\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OR_2} = -\sin\lambda\cos\lambda\cos^2\phi - \sin\lambda\cos\lambda\sin^2\phi + \sin\lambda\cos\lambda = 0$）。回転の後なので、そうでなければならない。

小問 (iii)

この小問を通して $P_2 \neq \pm P_0$ を仮定する。これにより O、P_0、P_2 は実際に平面を一つ定める。

考えてみよう なぜ回転角は角 P_2OP_0 と等しいのか。

P は平面 OP_0P_2 内にとどまるので、回転の軸はこの平面に垂直で O を通る直線でなければならない（回転は点を、その点を通り軸に垂直な平面内で動かすからである）。したがって P はこの平面内の大円（great circle）に沿って動き、この平面内のすべてのベクトルは回転角だけ回される。よってその角は $\overrightarrow{OP_2}$ と $\overrightarrow{OP_0}$ のなす角であり、両者とも単位ベクトルなので

$$\cos\theta = \overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_0} = (\cos\lambda\cos\phi)(1) + (\cos\lambda\sin\phi)(0) + (\sin\lambda)(0) = \cos\phi\cos\lambda,$$

となり、示すべきことが得られた。（遠回りに $2\pi-\theta$ だけ回しても、余弦は同じである。）

軸は $\overrightarrow{OP_2}$ と $\overrightarrow{OP_0}$ の両方に垂直なので、それらの外積（cross product）の方向にある：

$$\overrightarrow{OP_2}\times\overrightarrow{OP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\sin\phi & \sin\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ \sin\lambda,\ -\cos\lambda\sin\phi).$$

よって軸方向のベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ -\cos\lambda\sin\phi \end{pmatrix}.$$

である。この向きをとると、右ねじの法則（right-hand rule）に従う θ の回転が P_2 を P_0 に移す。軸に x 成分がないことに注意しよう。軸は OP_0 に垂直なので、当然そうなる。

検算

- $\lambda = 0$ ならば 2 回目の回転は何もしないので、3 回目の回転は単に 1 回目を元に戻すだけである：$\theta = \phi$ であり、軸は $(0, 0, -\sin\phi)$ の方向、すなわち z 軸である。公式と一致する。
- $\phi = 0$ ならば回転は y 軸のまわりのものだけであり、実際に軸は $(0, \sin\lambda, 0)$ の方向、$\theta = \lambda$ となる。
- 数値的に、ランダムな (ϕ, λ) 20 000 組に対してロドリゲスの公式（Rodrigues' formula）で回転を施すと P_2、Q_2、R_2 が再現され、$(0, \sin\lambda, -\cos\lambda\sin\phi)$ のまわりの θ の回転は P_2 を P_0 に戻す。$\phi = 0.7$、$\lambda = 0.4$ のとき $\cos\theta \approx 0.7045$ であり、$\theta \approx 0.789$ である。

よくある間違い

- 2 回目の段階で Q を回転させてしまう：Q は軸上にあるので動かない。

- R_2 の符号を間違える：P が $\mathbf{k}$ の方へ起き上がるにつれて、R は下へ、OP_1 から離れる向きに傾くので、その水平成分は $-\sin\lambda\,\mathbf{p}$ である。

STEP のその先へ

ここでの 2 つの角は経度（longitude）ϕ と緯度（latitude）λ であり、$\cos\theta = \cos\phi\cos\lambda$ は球面三角法の余弦定理（spherical cosine rule）の直角の場合である。これは航海術で大円距離を求めるのに使われる。より一般に、2 つの回転の合成は再びある一つの軸のまわりの回転となり（オイラー（Euler）の回転定理（Euler's rotation theorem））、列 $\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OQ_2}$、$\overrightarrow{OR_2}$ は合成された回転の直交行列（orthogonal matrix）をなす。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は回転行列と直交行列を扱っている。Needham の *Visual Complex Analysis*（ヴィジュアル複素解析）は、球面の回転が複素数を用いてどのように記述できるかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。