解答例

STEP III 2010、第 5 問

純粋数学 • 座標幾何による作図

> **STEP III 2010、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q5

鍵となる考え方

ここでは座標がすべてを片づけてくれる。R と S を求め、直線 PQ と RS を切片形（intercept form）で書き下し、それぞれが A を通り AC に垂直（perpendicular）な直線とどこで交わるかを調べればよい。両者はその直線と同じ点で交わり、その点こそが T でなければならない。作図のほうは一つの観察にもとづく。与えられた正方形の対角線がちょうど必要な辺の長さであり、前半の結果は、その対角線に対する直角を定規（straight-edge）だけで描く方法を与えてくれるのである。

解答

$TA \perp AC$ であることの証明

$C(a,a)$ を通る直線は扱いやすい。直線 CP は (a,a) と $(an,0)$ を結ぶので、その傾き（gradient）は $\dfrac{a}{a-an} = \dfrac{1}{1-n}$（$n<1$ より定義される）であり、方程式は

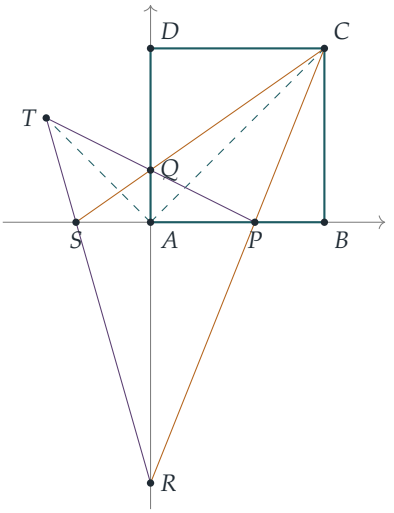
$$y = \frac{x-an}{1-n}.$$

である。直線 DA は $x=0$ なので、

$$R = \left(0,\ -\frac{an}{1-n}\right).$$

同様に、CQ は (a,a) と $(0,am)$ を結び、傾きは $1-m \neq 0$ で、方程式は $y = am + (1-m)x$ である。$y=0$（直線 BA）とおくと、

$$S = \left(-\frac{am}{1-m},\ 0\right).$$



ここで切片形を用いる。直線 PQ の切片は an と am であり、直線 RS の切片は $-\frac{am}{1-m}$ と $-\frac{an}{1-n}$ である。したがって

$$\begin{aligned} PQ: &\quad \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=a, \\ RS: &\quad -\frac{(1-m)x}{m}-\frac{(1-n)y}{n}=a. \end{aligned}$$

AC の傾きは 1 なので、A を通り AC に垂直な直線は $y=-x$ である。それぞれの方程式に $y=-x$ を代入すると、

$$\begin{aligned} PQ: &\quad x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a, \\ RS: &\quad x\left(-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}-1\right)=x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a. \end{aligned}$$

これらは同じ方程式である。$m\neq n$ より括弧内は 0 でないので、どちらの直線も $y=-x$ とただ一つの点

$$\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right).$$

で交わる。

考えてみよう PQ と RS の両方の上にある点が見つかった。なぜそれが T でなければならないのか。

異なる二直線は高々一点でしか交わらない。直線 PQ と RS は異なる（PQ は x 軸上の $x>0$ の点 P を通り、RS は x 軸と $x<0$ の点 S で交わる）。よって両者に共通な点はその交点 T にほかならない。ゆえに

$$T=\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right),$$

であり、これは $y=-x$ 上にある。ベクトル $\overrightarrow{AT}$ は $(1,-1)$ の定数倍であり、$\overrightarrow{AC}=(a,a)$ で、$(1,-1)\cdot(a,a)=0$ である。したがって、求めるとおり TA は AC に垂直である。

この計算では $m<n$ はまったく使っておらず、使ったのは $m\neq n$ だけであることに注意しよう。また P と Q の実際の位置も使っていないので、辺 AB 上の点 P と辺 AD 上の点 Q を**どのように**選んでも、$AP\neq AQ$ でありさえすれば、A における AC の垂線上に T が得られる。

作図

面積 $2a^2$ の正方形の一辺は $\sqrt{2}a$ であり、これは対角線 AC の長さである。そこで AC を一辺とする正方形を作る。座標で表せば、頂点が

$$A(0,0),\quad E(a,-a),\quad F(2a,0),\quad C(a,a).$$

の正方形である。その辺 $\overrightarrow{AE}=(a,-a)$、$\overrightarrow{EF}=(a,a)$、$\overrightarrow{FC}=(-a,a)$、$\overrightarrow{CA}=(-a,-a)$ はすべて長さ $\sqrt{2}a$ で、隣り合う辺は垂直であるから、面積は $2a^2$ である。

考えてみよう 目盛りのない定規では、点を結ぶことと直線を延長することしかできない。いったいどうすれば直角が得られるのか。

前半の内容がまさにその手順になっている。そこでの各段階は、既知の二点を結ぶか二直線の交点をとるかのどちらかだからである。定規を使って次のようにする。

1. 対角線 AC を引く。AB 上に任意の点 P、AD 上に任意の点 Q をとる。ただし A からの距離が見た目にはっきり異なるように選ぶ（測定は不要で、$AP\neq AQ$ でありさえすればよい）。
2. CP を延長して直線 DA との交点を R とし、CQ を延長して直線 BA との交点を S とする。PQ と RS を延長してその交点を T とする。
3. 直線 TA を引く。上の結果により、これは AC に垂直である。CB を B の先へ延長し、直線 TA との交点を E とする。（直線 CB は $x=a$、直線 TA は $y=-x$ なので、$E=(a,-a)$ である。）
4. 反対側の頂点 C で手順 1–3 を繰り返す。すなわち、CD 上と CB 上に、C からの距離が見た目にはっきり異なる点をとり、同じ作図を行う。正方形の中心のまわりの半回転は A と C を入れ替え、正方形をそれ自身に移すので、これにより C を通り AC に垂直な直線、すなわち $x+y=2a$ が得られる。
5. AB を B の先へ延長し、この直線との交点を $F=(2a,0)$ とする。

すると $AEFC$ は一辺 $AC=\sqrt{2}a$ の正方形であり、その面積は $2a^2$ である。（その対角線 AF と CE は直線 AB と CB に沿っており、新しい正方形の中心 B で交わる。）

検算

- $a=1$、$m=0.3$、$n=0.6$ とする。このとき $R=(0,-1.5)$、$S=(-\frac{3}{7},0)$、$T=(-0.6,0.6)$ である。点 T は R と S を通る直線上にある：$-\frac{0.7}{0.3}(-0.6)-\frac{0.4}{0.6}(0.6)=1.4-0.4=1$。また PQ 上にもある：$-1+2=1$。そして T は $y=-x$ 上にある。
- a、m、n を無作為に2000通り選び、$m<n$ と $m>n$ の両方の大小関係について、コンピュータで分数を用いて R、S、T を厳密に計算した。どの場合も $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であり、作図した $AEFC$ は長さの2乗が $2a^2$ の等しい四辺が直角に交わっていた。

よくある間違い

- PQ と RS の連立方程式を力ずくで解くこと。それでも解けるが、計算が煩雑になる。候補となる直線（$y=-x$）を両方の方程式で試すほうがはるかに速い。
- 共通の点が本当に T である理由を説明し忘れること。二直線が異なることが必要である。
- 作図において、どうやって行うのかを述べずに「垂線を引く」や「長さを写し取る」とすること。各段階は、点を結ぶか直線の交点をとるかのどちらかでなければならない。

STEP のその先へ

定規だけを用いる作図は**射影幾何学**（projective geometry）に属する。そこでは結ぶことと交わらせることだけが許された操作であり、R、S、T に潜んでいるような比は、複比（cross-ratio）や調和点列（harmonic range）を通して研究される。ポンスレ（Poncelet）とシュタイナー（Steiner）による古典的な定理によれば、円が一つとその中心が描かれていさえすれば、定規だけで定規とコンパスによる作図のすべてが可能である。ここでは正方形が同様の役割を果たしている。コクセター（Coxeter）の *Projective Geometry* は、この分野へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。