解答例

STEP III 2010、第 4 問

純粋数学 • 多項式の共通根

> **STEP III 2010、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q4

鍵となる考え方

α が最高次の係数の等しい 2 つの 2 次方程式（quadratic equation）をともに満たすならば、α はそれらの差も満たし、x^2 の項が打ち消し合って 1 次方程式が残る。これにより α が決まり、それを一方の 2 次方程式に代入し直せば条件が得られる。小問 (ii) でも、3 次式を 2 次式で割れば同じ方法が使える。2 次式の根の上では、3 次式はその余りとまったく同じようにふるまうので、2 つの 2 次方程式の場合に帰着し、小問 (i) の結果を引用できる。

解答

以下を通じて、「根」（root）は複素数の範囲での根を意味する。したがって、どの 2 次方程式も（重複度（multiplicity）を込めて数えて）2 つの根をもつ。

小問 (i)

α が両方の方程式を満たすとする。第 1 式から第 2 式を引くと

$$(a-c)\alpha + (b-d) = 0.$$

$a \neq c$ であるから $a-c$ で割ることができ、

$$\alpha = -\frac{b-d}{a-c},$$

が得られる。これが示すべきことであった。

条件について。 $k = a-c \neq 0$、$m = b-d$ とおくと、条件は $m^2 - amk + bk^2 = 0$ となる。

($\Rightarrow$) 共通根が存在するならば、最初の結果によりそれは $\alpha = -m/k$ である。これを $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ に代入すると

$$\frac{m^2}{k^2} - \frac{am}{k} + b = 0,$$

となり、$k^2 \neq 0$ を掛けると $m^2 - amk + bk^2 = 0$ が得られる。

($\Leftarrow$) $m^2 - amk + bk^2 = 0$ と仮定し、$\alpha = -m/k$ と**定義する**。条件を k^2 で割り、上の議論を逆にたどれば $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ がわかる。また、α の選び方から $(a-c)\alpha + (b-d) = k\alpha + m = 0$ である。よって

$$\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha^2 + a\alpha + b) - ((a-c)\alpha + (b-d)) = 0 - 0 = 0,$$

となり、α は共通根である。以上で $a \neq c$ のときの同値性（equivalence）が示された。

? 考えてみよう 順方向の証明だけではなぜ不十分なのか？

順方向の証明は、共通根が存在する**ならば**条件が成り立つ、ということしか述べていない。「必要十分」（if and only if）を示すには、条件から共通根が得られることも示さなければならない。だからこそ、条件から α を定義し、それが**両方の**方程式を満たすことを確かめたのである。

$a \neq c$ を外す場合。 $a = c$ とする。このとき条件は $(b-d)^2 = 0$、すなわち $b = d$ となる。

- $b = d$ ならば、2つの方程式は同一であるから当然共通根をもち（両方の根がともに共通根である）、条件も成り立つ。
- $b \neq d$ ならば、共通根 α があったとすると、引き算により $(a-c)\alpha + (b-d) = b - d = 0$ となり矛盾する。よって共通根は存在せず、条件も成り立たない。

いずれの場合も「共通根をもつこと」と「条件」は一致するので、条件 $a \neq c$ がなくても**結果はやはり成り立つ**。

（唯一注意を要するのは、実数の根だけを数える場合である。$a = c$、$b = d$ かつ $a^2 < 4b$ ならば条件は成り立つが、同一の2つの方程式は実数解をもたない。$a \neq c$ のときはこのような問題は生じない。係数が実数ならば、共通根 $-(b-d)/(a-c)$ は自動的に実数になるからである。）

小問 (ii)

3次式を $x^2 + ax + b$ で割る。$(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$ であるから

$$x^3 + (a+1)x^2 + qx + r = (x+1)(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b).$$

よって $x=\alpha$ で $x^2+ax+b=0$ ならば、そこで 3 次式は値 $(q-a-b)\alpha+(r-b)$ をとり、2 次式

$$(x^2+ax+b)+(q-a-b)x+(r-b)=x^2+(q-b)x+r.$$

も同じ値をとる。したがって、α が 2 次方程式と 3 次方程式の共通根であるための必要十分条件は、それが

$$x^2+ax+b=0 \qquad \text{かつ} \qquad x^2+(q-b)x+r=0.$$

の共通根であることである。次に、$c=q-b$、$d=r$ として小問 (i) を適用する。すると $a-c=a+b-q$、$b-d=b-r$ であるから、共通根が存在するための必要十分条件は

$$(b-r)^2-a(b-r)(a+b-q)+b(a+b-q)^2=0.$$

である。小問 (i) の結果は $a=c$ であってもなくても成り立つので、ここで追加の条件は必要ない。

例について。両方の方程式を 2 で割ってモニック（monic、最高次の係数が 1）にする：

$$x^2+\tfrac{5}{2}x+b=0, \qquad x^3+\tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}=0.$$

これらは $a=\frac{5}{2}$（実際 $a+1=\frac{7}{2}$ である）、$q=\frac{5}{2}$、$r=\frac{1}{2}$ として要求された形になっている。このとき $a+b-q=b$、$b-r=b-\frac{1}{2}$ であるから、条件は

$$\left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{5}{2}\left(b-\tfrac{1}{2}\right)b+b\cdot b^2=0.$$

となる。4 を掛けると：

$$(2b-1)^2-5b(2b-1)+4b^3=0$$
$$4b^3-6b^2+b+1=0.$$

見ればわかるように $b=1$ は根であり、

$$4b^3-6b^2+b+1=(b-1)(4b^2-2b-1).$$

と因数分解される。2 次の因数から $b=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ が得られる。よって、2 つの方程式が共通根をもつのは、ちょうど

$$b=1 \qquad \text{または} \qquad b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{または} \qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

のときである。

別の方法。ここでの 3 次方程式には b が含まれないので、そのまま解くことができる。$x=-\frac{1}{2}$ を試すと $-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-\frac{5}{2}+1=0$ となるので

$$2x^3+7x^2+5x+1=(2x+1)(x^2+3x+1),$$

であり、根は $-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$ である。共通根 x があれば $2b=-(2x^2+5x)$ でなければならない。$x=-\frac{1}{2}$ のとき、これより $b=1$ となる。他の 2 つの根については $x^2=-3x-1$ であるから $2x^2+5x=-x-2$ となり、$b=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})$ である。これは上の答えと一致する。

検算

- $b=1$ のとき、2 次式 $2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)$ は根 $-\frac{1}{2}$ をもち、これは 3 次方程式の根である。
- $b=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\approx 0.8090$：2 次方程式の根は ≈ -0.3820 と -2.1180 であり、$-0.3820\approx\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})$ は 3 次方程式の根である。
- a,b,c,d（および a,b,q,r）の整数値を無作為に 20 000 通り選んでコンピュータで検証したところ、$a=c$ の場合も含め、条件式の値が零になるのは、方程式が複素数の共通根をもつときちょうどそのときであることが確かめられた。

よくある間違い

- 「共通根 $\Rightarrow$ 条件」だけを証明し、逆（converse）を忘れる。
- $a=c$ についての問いに「いいえ、$a-c$ で割ったから」と答える。証明は破綻するが、**結果**は生き残る。両辺とも $b=d$ に帰着するからである。
- 2 で割らずに小問 (ii) を適用する。この公式はモニックな方程式を前提としている。

STEP のその先へ

小問 (i) の式は、2 つの 2 次式の**終結式**（resultant）である。これは係数についての多項式で、2 つの多項式が共通根をもつときちょうどそのときに零になる。終結式はシルベスター（Sylvester）の行列式に由来し、多項式の連立方程式を解くのに用いられる消去理論（elimination theory）の基礎となっている。小問 (ii) の「割って余りを残す」操作は、多項式に対するユークリッドの互除法（Euclidean algorithm）の第 1 段階であり、整数の場合とまったく同様に、2 つの多項式の最大公約式（highest common factor）を求めるものである。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、この枠組みで多項式の割り算と最大公約式を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。