解答例

STEP III 2010、第 2 問

純粋数学 • 定積分

> **STEP III 2010、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q2

鍵となる考え方

ここに現れる分母はどれも（x についての、あるいは x^2 についての）2 次式であり、その根は $\pm e^a$ や $\pm e^{-a}$ になる。双曲線関数（hyperbolic function）の係数を指数関数で書き直すと、因数分解（factorisation）がすぐに見える。e^a と e^{-a} は積が 1 で、和が $2\cosh a$（あるいは差が $2\sinh a$）だからである。そのあとは部分分数分解（partial fractions）によってすべてが対数か逆正接（arctangent）に帰着し、残る作業は答えを双曲線関数の形に整理することである。

解答

小問 (i)

定義より

$$\cosh a = \tfrac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right).$$

よって $2\cosh a = e^a + e^{-a}$ かつ $e^a \cdot e^{-a} = 1$ であり、したがって

$$x^2 + 2x\cosh a + 1 = (x + e^a)(x + e^{-a}).$$

$x \geq 0$ ではどちらの因数も正なので、被積分関数（integrand）は $[0,1]$ 上で連続である。$a > 0$ より 2 つの根 $-e^a$ と $-e^{-a}$ は相異なり、部分分数分解は

$$\frac{1}{(x+e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{e^a - e^{-a}}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right) = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right),$$

となる。通分して確かめることができる。分子は $(x+e^a)-(x+e^{-a})=e^a-e^{-a}$ となる。積分すると

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}\Big[\ln\frac{x+e^{-a}}{x+e^a}\Big]_0^1$$
$$= \frac{1}{2\sinh a}\left(\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a} - \ln\frac{e^{-a}}{e^a}\right).$$

1つ目の対数はきれいに簡単になる。$1+e^a=e^a(e^{-a}+1)$ なので $\dfrac{1+e^{-a}}{1+e^a}=e^{-a}$ である。2つ目は $\ln e^{-2a}=-2a$ である。よって

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}(-a+2a) = \frac{a}{2\sinh a},$$

となり、これが求める結果である。

小問 (ii)

1つ目の積分。 今度は係数が $2\sinh a = e^a - e^{-a}$、定数項が $-1 = e^a\cdot(-e^{-a})$ なので

$$x^2+2x\sinh a-1=(x+e^a)(x-e^{-a}).$$

考えてみよう 被積分関数は範囲 $[1,\infty)$ 全体で問題なく振る舞うだろうか？

根は $-e^a<0$ と e^{-a} であり、$a>0$ より $e^{-a}<1$ である。よって $x\geq 1$ ではどちらの因数も正で、被積分関数は連続である。x が大きいときは $1/x^2$ のように振る舞うので、この広義積分（improper integral）は収束（convergence）する。前と同様に部分分数分解すると、今度は $e^a-(-e^{-a})=2\cosh a$ を用いて

$$\frac{1}{(x-e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\frac{1}{x-e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right).$$

1から X まで積分して $X\to\infty$ とすると

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\ln\frac{X-e^{-a}}{X+e^a} - \ln\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}\right).$$

$X\to\infty$ のとき分数 $\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}\to 1$ なので、1つ目の対数は0に近づく。2つ目については、分子から e^{-a} をくくり出すと

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^a} = e^{-a}\frac{e^a-1}{e^a+1} = e^{-a}\tanh\tfrac{a}{2},$$

となる。ここで $\dfrac{e^a-1}{e^a+1}=\dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{e^{a/2}+e^{-a/2}}=\tanh\frac{a}{2}$（分子と分母を $e^{a/2}$ で割る）を用いた。よって2つ目の対数は $-a+\ln\tanh\frac{a}{2}$ であり、

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{a-\ln\tanh\frac{a}{2}}{2\cosh a} = \frac{a+\ln\coth\frac{a}{2}}{2\cosh a}.$$

分子の2つの項はどちらも正であり（$0<\tanh\frac{a}{2}<1$ だから）、正の被積分関数に対しては当然そうでなければならない。

2 つ目の積分。 これは小問 (i) の 2 次式で x を x^2 に置き換えたものである：

$$x^4 + 2x^2\cosh a + 1 = (x^2 + e^a)(x^2 + e^{-a}),$$

どちらの因数もすべての実数 x で正なので被積分関数は連続であり、無限遠では $O(1/x^4)$ なので積分は収束する。x^2 を変数とみて同じ部分分数分解を行うと

$$\frac{1}{(x^2 + e^{-a})(x^2 + e^a)} = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x^2 + e^{-a}} - \frac{1}{x^2 + e^a}\right).$$

それぞれの項は標準的な逆正接の積分である。$c > 0$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + c^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

それぞれ $c = e^{-a/2}$ と $c = e^{a/2}$ とすると（各項は単独で収束するので、積分を分けてよい）

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{1}{2\sinh a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sinh\frac{a}{2}}{2\sinh a}.$$

最後に、倍角公式（double-angle formula）$\sinh a = 2\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}$ により $\sinh\frac{a}{2}$ が約分されて

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{\pi}{4\cosh\frac{a}{2}}.$$

考えてみよう $\cosh\frac{a}{2}$ が現れることを前もって見抜く方法はあるだろうか？

ある。この積分を I とおく。置換（substitution）$x \mapsto 1/x$ により $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2\cosh a+1}\,\mathrm{d}x$ でもあることがわかるので

$$2I = \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2 + 2\cosh a}\,\mathrm{d}x.$$

$u = x - 1/x$ とおくと $\mathrm{d}u = (1 + 1/x^2)\,\mathrm{d}x$、$x^2 + 1/x^2 = u^2 + 2$ であり、u は $-\infty$ から ∞ まで動く。分母は $u^2 + 2 + 2\cosh a = u^2 + 4\cosh^2\frac{a}{2}$ となるので、$2I = \pi/(2\cosh\frac{a}{2})$ となり、同じ答えが得られる。

検算

- $a \to 0$ のとき、小問 (i) は $\int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ となり、$a/(2\sinh a) \to \frac{1}{2}$ である。最後の積分は $\int_0^\infty (1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ となり、$\pi/(4\cosh 0)$ と一致する。
- 数値的には、$a = 1$ のとき、シンプソンの公式（Simpson's rule）により小問 (i) は 0.4254590641、(ii) の 1 つ目の積分は 0.5741556186、2 つ目は 0.6965059227 となり、それぞれ $\frac{1}{2\sinh 1}$、$\frac{1-\ln\tanh\frac{1}{2}}{2\cosh 1}$、$\frac{\pi}{4\cosh\frac{1}{2}}$ と小数第 10 位まで一致する。

よくある間違い

- 部分分数分解の定数を間違える。定数は $1/(\text{根の差})$ であり、小問 (i) では $1/(2\sinh a)$ だが、(ii) の 1 つ目の積分では $1/(2\cosh a)$ である。
- $e^{-a} < 1$、すなわち分母の根が $[1, \infty)$ の外にあることの確認を忘れる。
- 答えを指数関数のまま残す。問題は双曲線関数での表示を求めているので、$\frac{e^a-1}{e^a+1}$ は $\tanh\frac{a}{2}$ に直すべきである。

STEP のその先へ

(ii) の 2 つ目の積分は、大学では通常、複素積分（contour integration）によって計算される。被積分関数は $\pm ie^{\pm a/2}$ に単純極（simple pole）をもち、上半平面（upper half-plane）にある留数（residue）を足し合わせると、数行で $\pi/(4\cosh\frac{a}{2})$ が得られる。同じ方法で $\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1+x^n)$ や、実解析的な方法では手に負えない多くの積分を扱うことができる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）には、留数とそれがなぜうまくいくのかについての幾何学的な説明がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。