解答例

STEP III 2010、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何分布の期待値

STEP III 2010、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q12

鍵となる考え方

級数 S は算術幾何級数（arithmetico-geometric series）であり、rS を引くという技巧によって通常の等比級数（geometric series）に帰着する。これが得られれば、この問題に現れるすべての期待値（expectation）はまさにこの形の和になる。すなわち、射撃の回数は一次的に増加し、そこまで到達する確率は等比的に減少する。したがって問題全体は、各期待値を和として書き表し、適切な r と d の値を読み取ることに帰着する。

解答

級数

$|r| < 1$ であるから、この級数は絶対収束（converges absolutely）する（各項は定数と $n|r|^n$ の積で抑えられる）。したがって項ごとに引き算してよい。r の同じべきをそろえて並べると

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+d)r + (1+2d)r^2 + (1+3d)r^3 + \cdots, \\ rS &= \quad\ r + (1+d)r^2 + (1+2d)r^3 + \cdots, \end{aligned}$$

となり、$n \geq 1$ に対する r^n の係数はちょうど d だけ異なる。よって

$$(1-r)S = 1 + d\,(r + r^2 + r^3 + \cdots) = 1 + \frac{rd}{1-r},$$

となる。ここで等比級数の和を用いたが、$|r| < 1$ であるからこれは正当である。$1 - r \neq 0$ で割ると

$$S = \frac{1}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

アーサー単独の場合

$0 < a \leq 1$ と仮定する（$a = 0$ ならばアーサー（Arthur）は決して命中しない）。アーサーが必要とする射撃の回数を N とする。$N = n$ となるのは、最初の $n-1$ 回がすべて外れ、n 回目が命中するときに限る。よって独立性（independence）より

$$\mathrm{P}(N = n) = a'^{n-1}a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

である。したがって

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a\, a'^{n-1} = a(1 + 2a' + 3a'^2 + \cdots).$$

括弧内は $r = a'$、$d = 1$ とした S である（a'^n の係数は $1 + n$）。また $0 \leq a' < 1$ であるから

$$\mathrm{E}(N) = a\left(\frac{1}{1-a'} + \frac{a'}{(1-a')^2}\right) = a\left(\frac{1}{a} + \frac{a'}{a^2}\right) = \frac{a + a'}{a} = \frac{1}{a},$$

となる。ここで $1 - a' = a$、続いて $a + a' = 1$ を用いた。（この式は $a = 1$ のときにも 1 を与える。）

勝負：どちらが勝つか

以下では $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする。このとき $0 < a'b' < 1$ である。射撃 $1, 3, 5, \ldots$ はアーサーのもの、射撃 $2, 4, 6, \ldots$ はボアディケア（Boadicea）のものである。アーサーの射撃 1 回とそれに続くボアディケアの射撃 1 回をまとめて**ラウンド**（round）と呼ぶ。1 つのラウンドが誰も命中せずに終わる確率は $a'b'$ である。

アーサーが射撃 $2k + 1$（$k = 0, 1, 2, \ldots$）で勝つのは、最初の k ラウンドが命中なしで終わり、その後アーサーが命中するときに限る。独立性よりこの確率は $(a'b')^k a$ であり、これらの事象は互いに排反（disjoint）であるから

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a = \frac{a}{1 - a'b'}.$$

同様に、ボアディケアが射撃 $2k + 2$ で勝つのは、k ラウンドが命中なしで終わり、アーサーが外し、ボアディケアが命中するときであり、その確率は $(a'b')^k a'b$ である。よって

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a'b = \frac{a'b}{1 - a'b'} = \frac{(1-a)b}{1 - (1-a)(1-b)}.$$

検算として、$1 - a'b' = a + b - ab = a + a'b$ であるから $\alpha + \beta = 1$ となる。すなわち、勝負は確率 1 で終わる。

勝負：長さの期待値

勝負における射撃の回数を T とする。前の部分より、$T=2k+1$ となる確率は $(a'b')^k a$、$T=2k+2$ となる確率は $(a'b')^k a'b$ である。$q=a'b'$ とおくと

$$\mathrm{E}(T)=a\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k+a'b\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k.$$

? **考えてみよう** これらの和は級数 S とどのように対応するか。

第 1 の和は $1+3q+5q^2+\cdots$ であり、これは $r=q$、$d=2$ とした S である。第 2 の和は $1+2q+3q^2+\cdots$ の 2 倍であり、これは $r=q$、$d=1$ とした S である。よって

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k=\frac{1}{1-q}+\frac{2q}{(1-q)^2}=\frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k=2\left(\frac{1}{1-q}+\frac{q}{(1-q)^2}\right)=\frac{2}{(1-q)^2}.$$

したがって

$$\mathrm{E}(T)=\frac{a(1+q)+2a'b}{(1-q)^2}.$$

次に、目標の式と比較する。$\alpha=a/(1-q)$ と $\beta=a'b/(1-q)$ を用いると

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=\frac{1}{1-q}+\frac{a'}{1-q}=\frac{(1+a')(1-q)}{(1-q)^2}.$$

よって、あとは $a(1+q)+2a'b=(1+a')(1-q)$ を示せばよい。$1-q=a+a'b$ を用いると

$$(1+a')(1-q)=(1+a')(a+a'b)=a+aa'+a'b+a'^2b,$$
$$a(1+q)+2a'b=a+aa'(1-b)+2a'b=a+aa'-aa'b+2a'b.$$

その差（第 1 式から第 2 式を引いたもの）は

$$a'^2b+a'b-2a'b+aa'b=a'b\,(a'+a-1)=0,$$

である。$a+a'=1$ だからである。したがって

$$\mathrm{E}(T)=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $a=1$ ならば、アーサーは直ちに命中する。このとき $\alpha=1$、$\beta=0$、$\mathrm{E}(T)=1$ であり、$\alpha/a+\beta/b$ と一致する。

- $a = b = p$ ならば、$\alpha/p + \beta/p = (\alpha+\beta)/p = 1/p$ である。これは正しい。このとき勝負は、それぞれ確率 p で命中する独立な射撃の列にすぎず、最初の部分より、最初の命中までに要する射撃の回数の平均は $1/p$ である。
- $a = 0.3$、$b = 0.45$ とすると $\alpha = 0.3/0.615 \approx 0.4878$、$\mathrm{E}(T) = 1.7/0.615 \approx 2.764$ となる。200 000 回の勝負のシミュレーションでは 0.486 と 2.769 が得られた。

よくある間違い

- ボアディケアが勝てるのはアーサーが直前に外した場合に限ることを忘れ、$\beta = b/(1-a'b')$ と書いてしまう。欠けている因子 a' は、$\alpha + \beta \neq 1$ となることで露見する。
- 射撃の回数ではなくラウンドの数を数えてしまう。ボアディケアがラウンド $k+1$ で勝つ勝負の射撃回数は $2k+2$ であり、$k+1$ ではない。

STEP のその先へ

このような結果は通常、最初のラウンドで条件付けする（「第一段階解析」（first-step analysis））ことで、より手際よく証明される。最初のラウンドで誰も命中しなければ、2 回の射撃の後に勝負は新たに始まり直すので、$\mathrm{E}(T) = a\cdot 1 + a'b\cdot 2 + a'b'\big(2+\mathrm{E}(T)\big)$ となり、これから 1 行で $\mathrm{E}(T) = (1+a')/(1-a'b')$ が得られる。第一段階解析は、数学科の 1 年次または 2 年次で学ぶマルコフ連鎖（Markov chain）の基本的な道具である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、母関数（generating function）とこの種の議論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。