解答例

STEP III 2010、第 11 問

力学 ・ 摩擦と相対運動

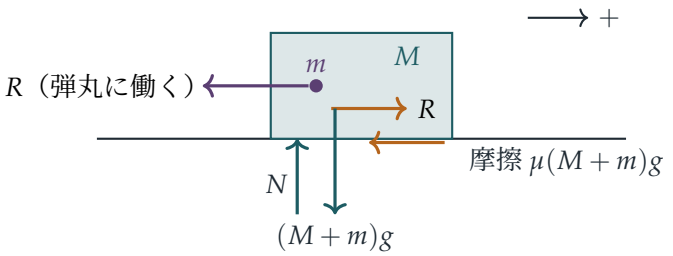
> **STEP III 2010、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q11

鍵となる考え方

この問題では運動量（momentum）は保存**されない**。地面からの摩擦（friction）が終始ブロックに働くからである。したがって、おなじみの「弾丸がブロックにめり込む」問題の近道は使えない。代わりに、弾丸とブロックを別々の質点（particle）として扱う。それぞれが一定の加速度をもち、大きさが等しく向きが反対の抵抗力 R によって結びついている。加速度が一定なので、*suvat* 公式（等加速度運動の公式）ですべて片がつく。相対運動（relative motion）は両者の差をとるだけでよい。

解答

弾丸とブロックを水平な直線上を運動する質点としてモデル化し、弾丸の進む向きを正とする。弾丸がブロック内にある間、ブロックは弾丸を力 R で押し返し、ニュートンの第三法則（Newton's third law）により、弾丸はブロックを力 R で前方へ押す。



垂直抗力（*normal reaction*）。鉛直方向には何も加速しない。弾丸はブロックに支えられているので、地面は両者の重さを支える。よって $N = (M + m)g$ である。

摩擦。題意より $R > (M+m)\mu g$ なので、ブロックに働く前向きの力 R は、摩擦力の最大値 $\mu N = (M+m)\mu g$ を上回る。したがってブロックは実際に滑り出し、動き始めると摩擦力は限界値 $\mu(M+m)g$ をとって後ろ向きに働く。

小問 (i)

弾丸に働く水平方向の力は後ろ向きの R だけなので、弾丸は R/m で減速する。ブロックに働く前向きの合力は $R-(M+m)\mu g$ なので、ブロックは前向きに

$$A = \frac{R-(M+m)\mu g}{M} > 0.$$

で加速する。ブロックに対する弾丸の加速度は $-\frac{R}{m} - A$ であるから、ブロックに対する弾丸の減速度の大きさは

$$a = \frac{R}{m} + \frac{R-(M+m)\mu g}{M},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

ブロックに対して、弾丸は速さ u で動き始め、一定の減速度 a で減速するので、時間

$$t_1 = \frac{u}{a}.$$

の後にブロックに対して静止する。その瞬間のブロックの速さが共通の速さ v である。ブロックは静止状態から一定の加速度 A で動き始めたので、

$$v = At_1 = \frac{Au}{a}, \qquad \text{すなわち} \qquad av = Au = \frac{Ru-(M+m)\mu gu}{M},$$

となり、これが求める結果である。

? 考えてみよう なぜ運動量保存則を使って v を求めてはいけないのか？

弾丸とブロックからなる系の運動量が保存されるのは、水平方向の外力が働かない場合に限られる。ここでは地面からの摩擦が時間 t_1 の間ずっとブロックに働き、運動量 $(M+m)\mu g\, t_1$ を奪う。（実際の弾丸ではこの時間はごく短いので $v \approx mu/(M+m)$ となるが、問題は厳密な値を求めている。）

小問 (iii)

時間 t_1 の間、ブロックは静止状態から速さ v まで一様に加速するので、移動距離は平均の速さと時間の積である。

$$s_1 = \frac{0+v}{2}\, t_1 = \frac{uv}{2a}.$$

小問 (iv)

弾丸がブロック内を進まなくなると、両者は質量 $M+m$ の一体の物体として運動する。その重さは依然として $(M+m)g$ なので、摩擦力は後ろ向きに $\mu(M+m)g$ であり、減速度は μg である。速さ v から始めて、さらに

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

だけ滑ってから止まる（その後は静止したままである。静止摩擦（static friction）に打ち勝つ水平方向の力がもはや残っていないからである）。総移動距離は

$$s_1 + s_2 = \frac{uv}{2a} + \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{uv}{2a} + \frac{v}{2\mu g} \cdot \frac{Au}{a} = \frac{uv}{2a\mu g}(\mu g + A),$$

である。ここで、v の一方の因子に小問 (ii) の $v = Au/a$ を用いた。

考えてみよう どうすれば a と A を消去して、すっきりした答えにたどり着けるか？

両方を分母 mM にそろえて、共通因数を探す。

$$\mu g + A = \frac{M\mu g + R - (M+m)\mu g}{M} = \frac{R - m\mu g}{M},$$
$$a = \frac{MR + mR - m(M+m)\mu g}{mM} = \frac{(M+m)(R - m\mu g)}{mM}.$$

よって、因数 $R - m\mu g$ が約分されて $\dfrac{\mu g + A}{a} = \dfrac{m}{M+m}$ となる（$R > (M+m)\mu g > m\mu g$ なので、この因数は正である）。したがって、ブロックの総移動距離は

$$\frac{uv}{2\mu g} \cdot \frac{m}{M+m} = \frac{muv}{2(M+m)\mu g},$$

となり、示すべき式が得られた。

$R < (M+m)\mu g$ の場合

この場合、ブロックを前に押す力 R は限界摩擦力 $(M+m)\mu g$ より小さいので、静止摩擦によってブロックはその場にとどまる。すなわち、ブロックはまったく動かない。弾丸は静止したブロックの中で R/m で減速するだけであり、距離 $\dfrac{mu^2}{2R}$ だけ貫入したところで静止する（ブロックが十分に厚いと仮定する）。ブロックは終始動かない。

検算

- $m = 0.02\,\mathrm{kg}$、$M = 2\,\mathrm{kg}$、$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$\mu = 0.5$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$R = 1000\,\mathrm{N}$ とする。このとき $a \approx 50\,495\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$v \approx 2.941\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$s_1 \approx 0.0087\,\mathrm{m}$、$s_2 \approx 0.8827\,\mathrm{m}$、

$s_1 + s_2 \approx 0.8914\,\mathrm{m}$ となり、$muv/\big(2(M+m)\mu g\big)$ と一致する。2 つの質点を逐次的に数値シミュレーションしても、同じ v と総移動距離が得られる。

- $R \to \infty$（瞬間的な衝突）のとき、$v = Au/a \to mu/(M+m)$ となり、運動量保存による答えに一致する。当然そうなるべきである。
- 次元（dimensions）：$muv/\big((M+m)\mu g\big)$ は (速さ)^2/(加速度) であり、長さの次元をもつ。

よくある間違い

- ブロックについて $N = Mg$ としてしまい、めり込んだ弾丸の重さも地面が支えていることを忘れる。
- 衝突の前後で運動量を保存させてしまい、摩擦による力積を無視する。
- ブロックに働く合力を、R から摩擦力を引いたものではなく、R そのものとしてしまう。

STEP のその先へ

力積（impulse）を使うと、運動全体の整合性を手早く確かめられる。系は最終的に静止するので、ブロックが動いている全時間にわたる地面からの摩擦の力積は、弾丸の最初の運動量 mu に等しくなければならない。系を部分に分け、内力はニュートンの第三法則で、外力は注意深く追跡することは、大学 1 年の力学の中核となるスキルであり、重心系（centre-of-mass frame）や非弾性衝突（inelastic collision）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの種の問題を数多く用いてこれらの考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。