解答例

STEP III 2010、第 10 問

力学 ・ 微小振動

STEP III 2010、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/10-s3-q10

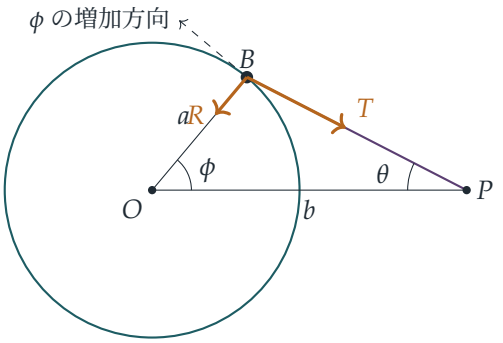
鍵となる考え方

ビーズは円周上に拘束されているので、その運動を変えるのはリングの接線（tangent）方向の力の成分だけである。垂直抗力（normal reaction）は（リングの鉛直方向の抗力とつり合う重力も同様に）まったく関わってこない。残りはすべて三角形 OBP の幾何であり、正弦定理（sine rule）によってその幾何が弦の長さに翻訳され、さらに角が小さいときには、後半で求められる θ と ϕ の間の線形な関係が得られる。

解答

運動方程式（equation of motion）

ビーズをなめらかなリング上の質点とし、弦を軽い弾性弦とみなす。P を x 軸の正の部分にとり、ϕ を反時計回りに測る。こうすると、図のように B は OP から角 ϕ の位置にある。三角形 OBP において O における角は ϕ、P における角は θ であるから、B における角は $\pi - \theta - \phi$ である。



$l = BP$ とおく。三角形 OBP における正弦定理により、

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\theta+\phi)},$$

である。ここで $\sin(\pi-\theta-\phi) = \sin(\theta+\phi)$ を用いた。特に $l = \dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta}$ である。

B が P に最も近づいたときの距離は $b-a$ であり、$b-a > c$ であるから、弦は常に張っている。したがってフックの法則（Hooke's law）により、張力（tension）は

$$T = \frac{\lambda(l-c)}{c} = \lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right).$$

である。

水平面内の力は、BP に沿った張力 T と、半径 OB に沿ったなめらかなリングからの垂直抗力 R である。（鉛直方向には、重さが抗力の鉛直成分とつり合っている。）ビーズは半径 a の円周上を動くので、ϕ が増加する向きの接線方向の加速度は $a\ddot{\phi}$ である。接線方向の成分をもつのは T だけである。

弦 BP は、内向きの半径 BO と角 $\pi-\theta-\phi$ をなす。したがって外向きの半径とは角 $\theta+\phi$ をなし、その接線方向の成分の大きさは $T\sin(\theta+\phi)$ である。この成分は P の方を向いており、それは ϕ が**減少する**向きである。接線方向に力を分解すると、

$$ma\ddot{\phi} = -\lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right)\sin(\theta+\phi),$$

となり、示すべき式が得られた。（$\phi < 0$ のときは図を OP に関して折り返せばよい。このとき $\theta < 0$ でもあり、符号付きの角で考えれば同じ方程式が成り立つ。）

微小振動

正弦定理から、厳密に $a\sin(\theta+\phi) = b\sin\theta$ が得られていた。θ と ϕ が小さいとき、両辺で $\sin x \approx x$ となるので、

$$a(\theta+\phi) \approx b\theta.$$

である。よって $\theta \approx \dfrac{a\phi}{b-a}$ であり、$\theta+\phi \approx \dfrac{b\theta}{a} \approx \dfrac{b\phi}{b-a}$ である。

> ? **考えてみよう** 両方の角が 0 に近づくとき、$\dfrac{a\sin\phi}{c\sin\theta}$ はどうなるだろうか。0/0 の形に見える。

この商はちょうど l/c であり、B がつり合いの位置に近づくと長さ l は $b-a$ に近づく。同じことだが、上の関係から $\dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta} \approx \dfrac{a\phi}{\theta} \approx b-a$ である。したがって主要項までででは、張力はつり合いの位置での一定の張力

$$T_0 = \lambda\left(\frac{b-a}{c} - 1\right) = \frac{\lambda(b-a-c)}{c},$$

に等しい。$c < b - a$ であるから、これは正である。因子 $\sin(\theta + \phi)$ はすでに小さいので、T に対する補正は 2 次の項にしか寄与しない。

運動方程式に代入し、1 次の項まで残すと、

$$ma\ddot{\phi} \approx -\frac{\lambda(b-a-c)}{c} \cdot \frac{b\phi}{b-a}, \qquad \text{よって} \qquad \ddot{\phi} = -\omega^2\phi, \quad \omega^2 = \frac{\lambda b(b-a-c)}{mac(b-a)}.$$

となる。これは単振動（simple harmonic motion）であり、$\theta = \phi = 0$ のまわりの微小振動の周期は

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mac(b-a)}{\lambda b(b-a-c)}}.$$

である。

検算

- 次元（dimensions）：λ は力であるから、$mac(b-a)/(\lambda b(b-a-c))$ の次元は $\mathrm{ML}/(\mathrm{MLT}^{-2}) = \mathrm{T}^2$ であり、周期として正しい。
- $c \to b - a$ のとき、つり合いの位置での張力は 0 になり、周期は無限大になる。たるんだ弦は復元力を生まないので、これは理にかなっている。
- 数値的に、$a = 1$、$b = 2.5$、$c = 0.7$、$\lambda = 3$、$m = 0.5$ とすると、公式から周期は 1.8586 となる。小さな変位から出発して厳密な運動を数値的に追跡する（力は B の位置から直接計算する）と、有効数字 6 桁まで同じ値が得られる。また、厳密な運動方程式は、ランダムな位置においてベクトルによる直接の分解とも一致する。

よくある間違い

- 符号を間違える。接線方向の引く力は P の方、すなわち $\phi = 0$ の方を向いているので、負の符号がつかなければならない。
- つり合いの位置で張力を 0 とみなしてしまう。そこでは弦は長さ $b - a > c$ まで伸びているので、張力は $\lambda(b-a-c)/c$ であり、復元力を生むのはまさにこの張力である。
- $\theta + \phi \approx \phi$ としてしまう。ここでは θ は ϕ と同じ大きさの量なので、これを落とすと誤った周期が得られる。

STEP のその先へ

ここでの方法は、微小振動の振動数を求める標準的なやり方である。すなわち、つり合いの位置を見つけ、そのまわりで運動方程式を線形化（linearise）し、ω^2 を読み取る。興味深いのは、復元力がすべて**つり合いの位置での**張力が弦の向きの変化を通じて働くことから生じている点であり、これは張ったギターの弦と同じ仕組みである。大学 1 年次の講義では、これはラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）や基準振動（normal modes）へと発展する。微小振動の解析が丁寧に展開されている様子を見るには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。