解答例

STEP II 2010、第 9 問

力学 ・ 放物体の衝突

STEP II 2010、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

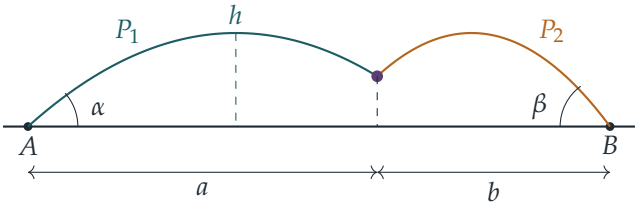
step.maths.org/questions/10-s2-q9

鍵となる考え方

同時に投げ出された二つの粒子は同じ加速度 g で落下するので、衝突の瞬間に高さが一致するためには、鉛直方向の初速度が等しくなければならない。すると両者の鉛直方向の運動はまったく同じになる。すなわち、最高点の高さ h は等しく、そこに達する時刻も等しく、地面に落ちるはずの時刻も等しい。衝突は最高点に達してから着地するまでの間に起こり、各粒子が進んだ水平距離は時間に比例するので、その距離は二つの簡単な限界の間に挟まれる。

解答

二つの粒子を、空気抵抗がなく重力 g のみを受けて自由に運動する放物体（projectile）としてモデル化する。P_1 の速さを u、P_2 の速さを v とし、投げ出した瞬間を $t = 0$ とし、衝突が時刻 $t_c > 0$ に起こるとする。



鉛直方向の運動が等しいこと

時刻 t における P_1 と P_2 の高さは

$$y_1 = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad y_2 = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。衝突の瞬間には $y_1 = y_2$ であるから $(u\sin\alpha - v\sin\beta)\,t_c = 0$ となり、$t_c > 0$ より

$$u\sin\alpha = v\sin\beta.$$

を得る。したがって、二つの粒子の鉛直方向の運動はまったく同じである。特に、両者は同じ時刻 T に同じ最高点の高さ h に達する。ここで

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g},$$

であり、両者とも時刻 $2T$ に地面に戻るはずである。

考えてみよう 「空中で」と「P_1 が最高点に達した後に」という条件から、t_c について何がわかるか？

P_1 は時刻 T に最高点にあるので、「後に」から $t_c > T$ が得られる。両粒子が地面より上にあるのは $0 < t < 2T$ のときだけなので、空中で衝突するためには $t_c < 2T$ でなければならない。よって

$$T < t_c < 2T.$$

b の評価

水平方向には P_2 は一定の速さ $v\cos\beta$ で運動するので、$b = v\cos\beta\, t_c$ である。時刻 T までに進む距離は

$$v\cos\beta\, T = \frac{v^2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g}\cdot\frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 2h\cot\beta.$$

である。したがって

$$b = v\cos\beta\, T\cdot\frac{t_c}{T} = 2h\cot\beta\cdot\frac{t_c}{T},$$

であり、$1 < t_c/T < 2$ かつ（β は鋭角なので）$2h\cot\beta > 0$ であるから、

$$2h\cot\beta < b < 4h\cot\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。

a の評価

まったく同様に、$a = u\cos\alpha\, t_c$ であり、

$$u\cos\alpha\, T = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2h\cot\alpha,$$

であるから $a = 2h\cot\alpha\cdot t_c/T$ となり、$1 < t_c/T < 2$ より

$$2h\cot\alpha < a < 4h\cot\alpha.$$

を得る。ここでは同じ h を用いている。h は定義により P_1 の最高点の高さであるが、鉛直方向の運動が同一であるから P_2 の最高点の高さでもある。

検算

- 境界の場合：ちょうど最高点で衝突する場合（$t_c = T$）は $a = 2h\cot\alpha$ となり、これはおなじみの水平到達距離（range）の半分 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$ である。着地の瞬間に衝突する場合（$t_c = 2T$）は $a = 4h\cot\alpha$ となり、これは水平到達距離全体 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ である。問題の狭義の不等式はこれらの間にある。
- 数値による確認：$g = 9.8$、$u = 20$、$\alpha = 0.7$、$\beta = 0.9$（ラジアン）、$v = u\sin\alpha/\sin\beta$、$t_c = 1.5T$ とすると、$h \approx 8.470$、$a \approx 30.17$ となり、これは $2h\cot\alpha \approx 20.11$ と $4h\cot\alpha \approx 40.22$ の間にある（実際、ちょうど 1.5×20.11 である）。この方法で 20 000 通りのランダムな設定を試し、P_1 の運動を時間刻みで追って h を確認し、粒子が実際に一致することを確かめた。

よくある間違い

- 衝突点に達するまでの時間を二つの粒子で異なるものとして扱うこと。両者は同時に投げ出されるので、同じ t_c である。
- 上からの評価の根拠を示し忘れること。これは衝突が空中で、すなわち共通の着地時刻 $2T$ より前に起こることから得られる。

STEP のその先へ

鍵となる一歩は座標系の変換である。加速度 g で自由落下する座標系では、両粒子とも一定の速度で直線運動をするので、その座標系で互いに向かって投げられていた場合に限り衝突する。これは古典的な「猿と狩人（monkey and hunter）」の考え方である。加速する座標系で考えること、そして加速度が一様でないときに現れる見かけの力（fictitious force）は、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動、相対運動、非慣性系（non-inertial frame）を多くの良問とともに扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。