解答例

STEP II 2010、第 8 問

純粋数学 • 曲線で囲まれた図形の面積

> **STEP II 2010、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q8

鍵となる考え方

$\sin x \leq 1$ であるから、曲線 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ が $y = \mathrm{e}^{-x}$ より上に出ることは決してない。両者が出会うのはちょうど $\sin x = 1$ となる点であり、そこではちょうど接する（touch）。したがって各面積は、隣り合う接点の間での $\mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)$ のただ 1 つの積分で表され、符号の変化を気にする必要はない。$\mathrm{e}^{-x}\sin x$ の積分は「部分積分（integration by parts）を 2 回行う」定番の計算であり、さらに積分の端点はすべて $\sin x = 1$ かつ $\cos x = 0$ となる点なので、そこでは原始関数（antiderivative）が非常に簡単な形になる。

解答

概形

C_1 はおなじみの減衰する指数関数であり、$(0, 1)$ から始まって 0 に向かって減少する。C_2 は減衰する正弦波（damped sine wave）である。原点から始まり、π のすべての倍数で値がゼロになり、$y = \mathrm{e}^{-x}$ と $y = -\mathrm{e}^{-x}$ の間に閉じ込められている。これは $-1 \leq \sin x \leq 1$ だからである。振動は非常に速く小さくなり、最初の負の谷でさえ深さはわずか約 0.014 にすぎない（$x = \frac{5\pi}{4}$ において）。

2 曲線はどこで出会うか。$\mathrm{e}^{-x} > 0$ であるから、

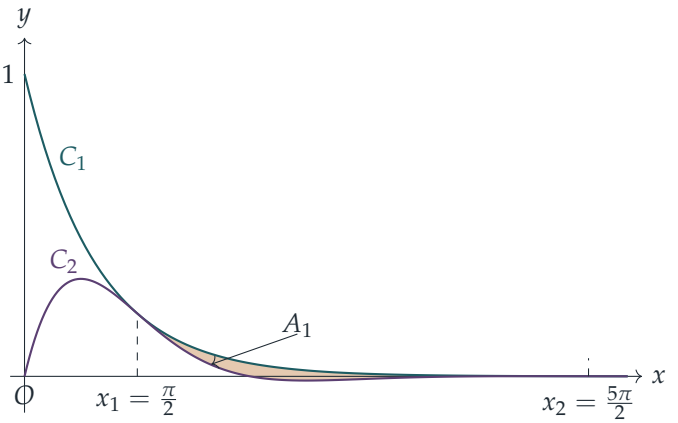
$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x} \iff \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

これらの点で 2 曲線は交差するのではなく接する。すなわち、C_2 はいたるところで C_1

上またはその下にある。実際、そこでは傾きも一致する。なぜなら

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}\sin x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \text{ただし } \sin x = 1,\ \cos x = 0.$$

C_2 の最初の極大（maximum）は $x = \frac{\pi}{4}$（$\cos x = \sin x$ となる点）にあり、最初の接点 $x = \frac{\pi}{2}$ より**前**にあることに注意しよう。概形図では、C_2 がいったん山の頂上に達したあと下がってきて、C_1 に接するように描かなければならない。



面積 A_n

n 番目の接点とは、n 番目の $\sin x = 1$ の解（ただし $x > 0$）である：

$$x_n = \tfrac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi = \tfrac{(4n-3)\pi}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n + 2\pi.$$

x_n と x_{n+1} の間では $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x) \geq 0$ であるから、この区間全体で C_1 が上側の境界となり、

$$A_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x.$$

考えてみよう $\mathrm{e}^{-x}\sin x$ はどのように積分すればよいか。

部分積分を 2 回行うと、もとの積分に戻ってくる。$I = \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ とおく。$u = \sin x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ として部分積分し、さらに $u = \cos x$ としてもう一度部分積分すると、

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

よって $2I = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$ となり、$I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + c$ である。（微分すれば確かめられる。）

したがって、$\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ の原始関数の 1 つは

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x).$$

ここからがうまいところである。どの接点でも $\sin x = 1$ かつ $\cos x = 0$ であるから、そこでは

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

ゆえに、$x_{n+1} = x_n + 2\pi$ を用いて

$$\begin{aligned} A_n = F(x_{n+1}) - F(x_n) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1). \end{aligned}$$

最後に $x_n + 2\pi = \frac{(4n-3)\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$ であるから、

$$A_n = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-(4n+1)\pi/2},$$

となり、示すべき式が得られた。

無限和

この式から $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-2\pi}A_n$ がわかるので、面積の列は初項 $A_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}$、公比（common ratio）$r = \mathrm{e}^{-2\pi}$ の等比級数（geometric series）をなす。$0 < r < 1$ であるから級数は収束（converge）し、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}}{\mathrm{e}^{-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

検算

- 総和は x_1 より右側にある 2 曲線の間の面積全体なので、$\int_{\pi/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} F(X) - F(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$ に等しいはずである。実際そうなっており、級数を使う必要すらない。
- 数値的には $A_1 \approx 0.10375$、$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.10394$ である。概形図からも予想されるとおり、面積のほとんどは最初の領域にある。これは $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.0019$ だからである。シンプソンの公式（Simpson's rule）を $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ に区間 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ で適用しても、同じ 0.103746 が得られる。

よくある間違い

- 接点を C_2 が極大となる点だと考えてしまう。極大は $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ であり、2 曲線が接するのは $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ である。
- $\sin x = \pm 1$ の解をすべて数えてしまう、あるいは $\sin x = 1$ の解の間隔を π としてしまう。隣り合う接点の間隔は 2π である。
- $\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ での符号の誤り。答えを微分して確かめること。

STEP のその先へ

曲線 C_2 は減衰振動（damped oscillation）、すなわち摩擦のあるばねの運動の形をしており、包絡線（envelope）$\pm\mathrm{e}^{-x}$ が振動の減衰の速さを決めている。$\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ のような積分は、$\int \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} \, \mathrm{d}x$ の虚部（imaginary part）として計算するほうがずっと速い。これは大学 1 年目の講義で、微分方程式（differential equations）やラプラス変換（Laplace transform）を扱う際に絶えず使われる技法である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、減衰振動が詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。