解答例

STEP II 2010、第 7 問

純粋数学 • 3 次方程式

> **STEP II 2010、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q7

鍵となる考え方

最高次の係数（leading coefficient）が正である三次関数（cubic）のグラフが軸とただ一度だけ交わるのは、2 つの停留点（turning point）が軸に関して同じ側にあるとき、かつそのときに限る。小問 (ii) は、x^2 の項をもたない三次方程式を解くための古典的な技法である。置換（substitution）$x = u + q/u$ は、x^3 に現れる交差項が $-3qx$ と打ち消し合うように選ばれており、その結果 u^3 についての二次方程式が残る。小問 (iii) は、実は x の代わりに p を用いた同じ三次方程式が姿を変えて現れたものであることがわかる。

解答

小問 (i)

$f(x) = x^3 - 3qx - q(1+q)$ とおく。このとき $f'(x) = 3x^2 - 3q$ であり、これは $x = \pm\sqrt{q}$ で 0 になる（$q > 0$ であるから実数である）。$f''(x) = 6x$ であるから、$x = -\sqrt{q}$ における点は極大点（local maximum）、$x = \sqrt{q}$ における点は極小点（local minimum）である。

極大点では

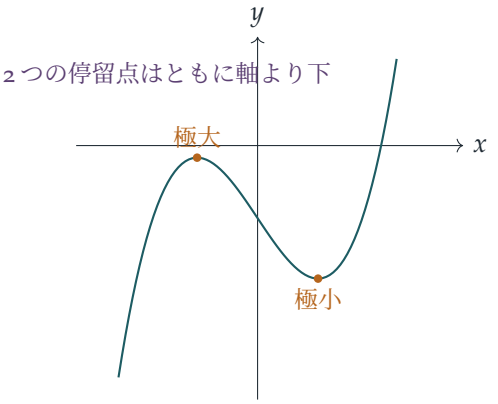
$$\begin{aligned} f(-\sqrt{q}) &= -q\sqrt{q} + 3q\sqrt{q} - q - q^2 \\ &= -q(q - 2\sqrt{q} + 1) \\ &= -q(\sqrt{q} - 1)^2. \end{aligned}$$

である。$q > 0$ かつ $q \neq 1$（したがって $\sqrt{q} \neq 1$）であるから、これは厳密に負である。

極小点はさらに低い：

$$f(\sqrt{q}) = q\sqrt{q} - 3q\sqrt{q} - q - q^2 = -2q\sqrt{q} - q - q^2 < 0.$$

よって、2 つの停留点はともに x 軸より下にある。$x < \sqrt{q}$ では、曲線は負である極大値より上に出ることがないので、そこでは軸と交わらない。$x > \sqrt{q}$ では関数は狭義単調増加であり、負の値から $+\infty$ まで増加するので、軸とちょうど一度交わる。したがって、曲線は x 軸とただ一度だけ交わる。



小問 (ii)

二項定理（binomial theorem）を用いて $x = u + q/u$ を 3 乗すると

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{q}{u} + 3u \cdot \frac{q^2}{u^2} + \frac{q^3}{u^3} \\ &= u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3q\left(u + \frac{q}{u}\right) = u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3qx. \end{aligned}$$

となる。よって $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$ であり、三次方程式は

$$u^3 + \frac{q^3}{u^3} = q(1+q).$$

となる。u^3 を掛けると（この置換が意味をもつためには $u \neq 0$ であることに注意する）、u^3 が満たす二次方程式は

$$(u^3)^2 - q(1+q)\,u^3 + q^3 = 0.$$

である。

? **考えてみよう** この二次式はどのように因数分解できるか。

2 つの解の和は $q+q^2$、積は $q^3 = q\cdot q^2$ でなければならないので、解は q と q^2 である：

$$(u^3-q)(u^3-q^2)=0.$$

実数の立方根（cube root）をとると、$u=q^{1/3}$ または $u=q^{2/3}$ である。どちらも同じ x を与える：

$$q^{1/3}+\frac{q}{q^{1/3}}=q^{1/3}+q^{2/3}, \qquad q^{2/3}+\frac{q}{q^{2/3}}=q^{2/3}+q^{1/3}.$$

直接確かめると、$s=q^{1/3}$、$x=s+s^2$ とおけば $x^3=s^3+3s^4+3s^5+s^6$ かつ $3qx=3s^4+3s^5$ であるから、$x^3-3qx=s^3+s^6=q(1+q)$ となる。小問 (i) より、$q>0$、$q\neq 1$ のときこの三次方程式の実数解はただ 1 つであるから、その実数解は

$$x=q^{1/3}+q^{2/3}.$$

である。

小問 (iii)

$\alpha+\beta=p$ かつ $\alpha\beta=q$ であるから

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3qp,$$

となり、示すべき式が得られた。

一方の解が他方の解の 2 乗であるならば、$\alpha^2=\beta$ または $\beta^2=\alpha$ であるから、いずれの場合も

$$(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)=0.$$

が成り立つ。この式は α と β について対称（symmetric）であるから、p と q で表すことができる。展開すると

$$\begin{aligned}(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)&=\alpha^2\beta^2-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha\beta\\&=q^2-(p^3-3qp)+q.\end{aligned}$$

となる。これを 0 とおくと、関係式

$$p^3-3qp-q(1+q)=0.$$

が得られる。これはまさに、小問 (ii) の三次方程式で x の代わりに p としたものである。$q>0$、$q\neq 1$ で p が実数のとき、p はその唯一の実数解でなければならないので

$$p=q^{1/3}+q^{2/3}.$$

である。これは納得のいく結果である。このとき解は $\alpha=q^{1/3}$ と $\beta=q^{2/3}=\alpha^2$ であり、その和は p、積は q である。

検算

$q = 8$ とする。小問 (ii) からは $x = 2 + 4 = 6$ が得られ、実際 $216 - 144 - 72 = 0$ である。小問 (iii) では、$p = 6$ のとき $t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$ となり、$4 = 2^2$ である。コンピュータにより、無作為に選んだ数千個の q について (i) の 2 つの停留点での値を、無作為に選んだ複素数 u について恒等式 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$ を確認し、さらに $p = q^{1/3} + q^{2/3}$ のとき常に一方が他方の 2 乗であるような解の組が得られることも確認した。

よくある間違い

- (i) で、極小値が負であることだけを確かめてしまう。それだけでは 3 回交わる可能性が残る。重要なのは極大値が負であることであり、$q \neq 1$ が使われるのはまさにそこである。
- (ii) で、u^3 の 2 つの値が異なる 2 つの解を与えるのではないかと心配してしまう。u と q/u は対称な役割を果たすので、両者は当然同じ x を与える。

STEP のその先へ

(ii) の置換は、一般の三次方程式に対するカルダーノ（Cardano）の公式の核心であり、数学において複素数が初めて避けられないものとなった場面でもある。三次方程式が 3 つの実数解をもつとき、u^3 についての二次方程式は複素数解をもつのである。除外された場合 $q = 1$ はよい例である。このときは $p = -1$ も許され、$t^2 + t + 1 = 0$ の解は ω と ω^2、すなわち 1 の虚立方根であり、それぞれが他方の 2 乗になっている。多項式方程式がいつ冪根によって解けるか（solvable by radicals）という問題の全体像はガロア理論（Galois theory）であり、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）にわかりやすく書かれている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。