解答例

STEP II 2010、第 6 問

純粋数学 • 正四面体の幾何

STEP II 2010、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

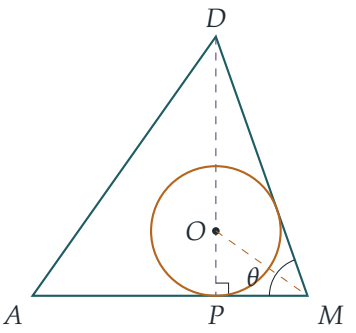
step.maths.org/questions/10-s2-q6

鍵となる考え方

正四面体（regular tetrahedron）は対称性が非常に高いので、ほとんどすべてのことが一つの鉛直な断面（cross-section）の中で起こる。すなわち、ある辺の中点、それに向かい合う頂点、そして頂上の頂点を通る平面である。この平面の中では、3 次元の問題はすべて直角三角形の問題になる。球については、対称性から中心の位置が決まり、小問 (ii) の角から中心が各面からどれだけ離れているかがわかる。

解答

以下では一貫して、M を BC の中点とする。各面は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから、各中線（median）（たとえば AM や DM）の長さは $\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。



小問 (i)

D は A、B、C から等距離にあり、DP は平面 ABC に垂直であるから、三平方の定理（Pythagoras）により $PA^2 = DA^2 - DP^2 = DB^2 - DP^2 = PB^2$ であり、同様に $PB = PC$ である。よって P は正三角形 ABC の外心（circumcentre）であり、これはその重心（centroid）でもある。重心は各中線を頂点の側から 3 分の 2 の位置にあるので、

$$PA = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad PM = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}.$$

すると、三角形 DPA の P における直角から、

$$PD^2 = DA^2 - PA^2 = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \qquad \text{よって} \qquad PD = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

小問 (ii)

6 本の辺はすべて同じように見える（正四面体の対称変換によって、どの辺も他のどの辺にも移すことができる）。したがって、BC で交わる面 ABC と面 DBC のなす角（angle between faces）θ を求めれば十分である。

> **考えてみよう** 図の中のどの角が、本当に二つの面のなす角**そのもの**なのだろうか。

1 本の直線で交わる二つの平面のなす角は、それぞれの平面内に 1 本ずつ、共通の直線上の同じ点でその直線に垂直な 2 本の直線を用いて測る。正三角形 ABC では中線 AM が BC に垂直であり、正三角形 DBC では中線 DM が BC に垂直である。よって $\theta = \angle AMD$ であり、P は AM 上の A と M の間にあるから、$\theta = \angle PMD$ でもある。

三角形 DPM は P に直角をもち、$PM = \frac{1}{2\sqrt{3}}$、斜辺は $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。したがって

$$\cos\theta = \frac{PM}{DM} = \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3},$$

となり、示すべきことが得られた。（検算として、$PD^2 = DM^2 - PM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$ であり、小問 (i) と一致する。）

小問 (iii)

最適な球。 O を DP 上の点で $OP = r$ となるものとし、O が三つの斜めの面からも距離 r にあるように r を定める。対称性により、面 DBC だけを扱えば十分である。

平面 AMD は BC に垂直である（どちらも BC に垂直な AM と DM を含むから）。よってこの平面は面 DBC に垂直であり、O からその面に下ろした垂線はこの断面内にある。すなわち、それは O から直線 MD に下ろした垂線である。O は直線 MP から

距離 OP、直線 MD から距離 r の位置にあり、この二つを等しくしたいのだから、O は M における角 θ の二等分線（bisector）上になければならない。よって

$$r = PM\tan\tfrac{\theta}{2}.$$

小問 (ii) から、$\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ を用いると、

$$\tan^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\tfrac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

（θ は鋭角であるから正）。したがって

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

中心 O、半径 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ の球は四つの面すべてに接し、しかも四面体の内部にある。O は内部の点であり、どの面からの距離も r 以上だからである。

> **考えてみよう** どこに置いたとしても、これより大きな球が存在しないことはどうしてわかるのだろうか。

これより大きな球は入らない。四面体の内部の任意の点 X をとり、四つの面からの距離を d_1, d_2, d_3, d_4 とする。X と各頂点を結ぶと、四面体は各面を底面とする四つの角錐（pyramid）に分割され、それぞれの底面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。それらの体積を足し合わせると、

$$V = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{4}\,(d_1+d_2+d_3+d_4).$$

ところが $X = D$ とおく（このとき三つの距離は 0 で、残りの一つは PD である）と、$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\,PD$ がわかる。したがって、すべての内部の点について

$$d_1+d_2+d_3+d_4 = PD = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

X を中心とする半径 ρ の球が内部に収まるのは、すべての $d_i \geq \rho$ のときに限るから、$4\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$、すなわち $\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$ である。よって最大の球の半径は

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} = \tfrac{1}{4}\,PD,$$

であり、等号が成り立つのは四つの距離がすべて等しいとき（O において）に限る。

検算

- 座標：$A=(0,0,0)$、$B=(1,0,0)$、$C=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$、$D=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\sqrt{2/3})$ とすると 6 本の辺の長さはすべて 1 となり、$PD \approx 0.8165$ である。

- 任意の二つの面の外向き単位法線ベクトル（unit normal）の内積（dot product）は $-\frac{1}{3}$ であり、$\cos\theta = \frac{1}{3}$（約 70.5°）が確かめられる。
- 点 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$ は四つの面すべてから距離 $0.20412\ldots = \frac{\sqrt{6}}{12}$ にある。内部の点を無作為にとると、距離の和は常に $0.8165\ldots$ となり、最小の距離が 0.2041 を超えることはなかった。
- 中心は PD を下から 4 分の 1 の位置にある。これは、正四面体の内心（incentre）が重心と一致し、重心はある面から向かい合う頂点までの 4 分の 1 の位置にあるという事実と合致する。

よくある間違い

- $\angle DAM$ や $\angle DBA$ を面のなす角として用いること。2 本の直線はどちらも共通の辺に垂直でなければならず、DM と AM はその条件を満たしている。
- PA を中線の 3 分の 2 ではなく半分としてしまうこと。
- 四つの面に接する球を求めただけで、他の場所にある球がそれより大きくなり得ない理由を述べないこと。距離の和に関する恒等式を使えば、これは 2 行で片づく。

STEP のその先へ

面までの距離の和が一定であることは、正三角形に関するヴィヴィアーニの定理（Viviani's theorem）の 3 次元版である。これは重心座標（barycentric coordinates）から導かれる。重心座標とは、単体（simplex）の任意の点をその頂点の重み付き平均として表すものである。角 $\arccos\frac{1}{3}$ は化学にも現れる。メタンの結合角は $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.5°$ であり、これはこの同じ四面体の二つの頂点が中心に対して張る角である。この種の 3 次元的な推論をさらに学ぶには、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*、あるいは内積と外積（cross product）を用いたベクトルによる方法については、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。